M22

NUEVA EDICIÓN

I

Mate-mática

longseller
EDUCACIÓN

MATEMÁTICA I

longseller
EDUCACIÓN

Diseño gráfico |	Darío Contreras
Diseño de tapa |	Andrés Mendilaharzu
Ilustraciones |	Daniel Roldán
	Coni Luna
Historietas |	Pablo Leona
	(Guiones)
	Marcelo Valentini
	(Ilustraciones)
Fotografía |	P. Picca – M. Ravaglia
	Archivo Longseller
Gráficos |	Natalia Fernández
	Coni Luna

© EDITORIAL LONGSELLER S.A.
San Juan 775, 2° piso
(C1147AAF) CABA, Argentina
www.longseller.com.ar

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723. Libro de edición argentina. Está prohibida y penada por la ley la reproducción total o parcial de este libro, en cualquier forma, por medios mecánicos, electrónicos, informáticos, magnéticos, incluso fotocopia y cualquier otro sistema de almacenamiento de información. Cualquier reproducción sin el previo consentimiento escrito del editor viola los derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Esta edición se terminó de imprimir en Impresiones Barracas, Buenos Aires, Argentina, en el mes de abril de 2018.

Matemática I : nueva edición / Graciela Chemello ... [et al.]. - 1a ed . 1a reimp. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Longseller, 2018.

224 p. ; 28 x 20 cm.

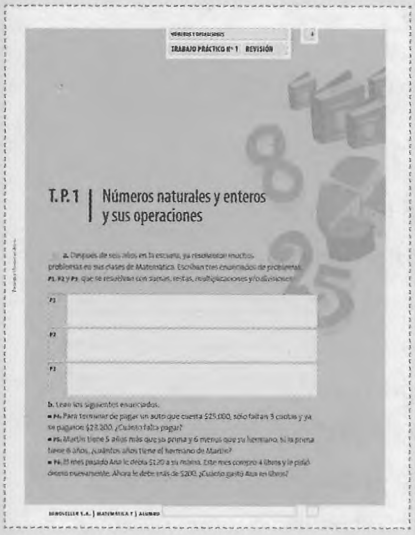
ISBN 978-987-683-539-8

1. Matemática. I. Chemello, Graciela
CDD 372.7

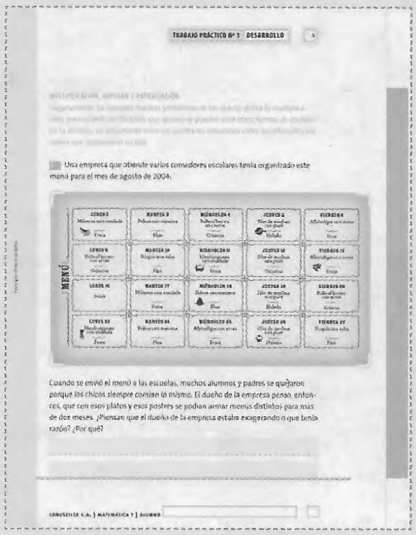
La propuesta

Matemática I está compuesto por dos partes: Trabajos prácticos (T. P.) y Anexo teórico (A. T.). En sus respectivos índices, puede observarse la correspondencia establecida entre ambos.

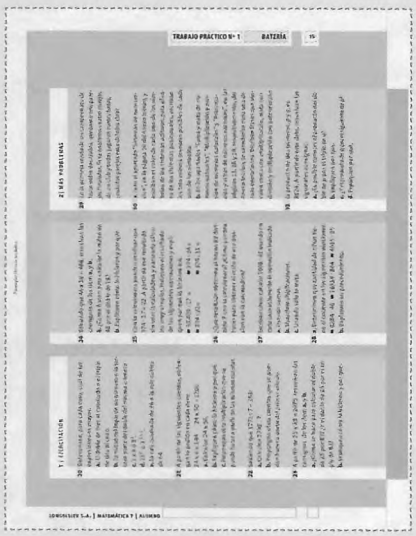
Los **Trabajos prácticos** contienen planteos de diversos problemas y se organizan en torno a tres momentos clave de la enseñanza : la revisión, el desarrollo de un tema, y la ejercitación y la práctica.



En "Revisión", se proponen actividades para trabajar contenidos que fueron aprendidos con anterioridad.



En "Desarrollo", se ofrecen diversas situaciones problemáticas. Se incluye, también, una secuencia de remisiones al Anexo teórico y una serie de notas al pie que facilitan la comprensión de los problemas.



En "Batería", se propone una serie extensa y variada de ejercicios y problemas de distinto nivel de complejidad.

El **Anexo teórico** contiene textos explicativos, en los que se exponen, teóricamente y de modo accesible, los contenidos curriculares. Es un material al que se puede acudir para estudiar y aclarar dudas. Al final, se incluyen dos fichas que pueden resultar muy prácticas para su uso: una con todas las fórmulas y otra con todos los símbolos que conviene tener a mano.

Graciela Chemello (coordinadora)
Mónica Agrasar | Ana Lía Crippa | Adriana Díaz

Graciela Chemello | Es profesora en Matemática y en Física, y especialista en Didáctica de la Matemática. Coordina el equipo de Matemática del Ministerio de Educación de la Nación, y trabaja en formación docente en la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires y en la FLACSO.

Mónica Agrasar | Es licenciada en Matemática. Trabaja en formación y capacitación de docentes en la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires y en asesoramiento técnico en el Ministerio de Educación de la Nación.

Ana Lía Crippa | Es profesora en Matemática y en Física por la UNLP. Trabaja en formación de profesores en la UNLP y el ISFD Nº 17 de la provincia de Buenos Aires, en la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires y en asesoramiento técnico en el Ministerio de Educación de la Nación.

Adriana Díaz | Es profesora en Matemática. Trabaja como coordinadora en el equipo de capacitación de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Agradecemos a los docentes que colaboraron brindando sus opiniones y sugerencias: Estela Beatriz Bethencourt, Elizabeth María Blanco, Mirta Juana Luna, Rosa María Mariné, Myriam Mettler, Marcela Oreglia, Fátima Elizabeth Sánchez y María Elena Sanguinetti.

I

TRABAJOS PRÁCTICOS

G. CHEMELLO (COORD.) | M. AGRASAR | A. CRIPPA | A. DÍAZ

longseller
EDUCACIÓN

Índice

T. P. Nº 1

Números naturales y enteros **y sus operaciones || 7**
Multiplicación, división y potenciación || 9
Interpretar una potencia || 10
Propiedades de las operaciones || 14
Multiplicar y dividir por 10, 100 y 1000 || 15

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 1 | NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS || 143

T. P. Nº 2

Números naturales: divisibilidad y regularidades || 21
Múltiplos y divisores || 23
Simular para resolver || 23
Criterios de divisibilidad || 26
Condiciones numéricas || 26
Patrones numéricos || 28
Explicar por qué || 30

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 1 | NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS || 143

T. P. Nº 3

Números racionales positivos y sus operaciones || 35
Usos y representaciones || 37
Escrituras equivalentes || 41
Propiedades y relaciones || 43
Operaciones y propiedades || 46
Claves para controlar || 46
Otras claves para controlar || 48
Más claves para controlar || 49

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 2 | NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS || 163

T. P. Nº 4

Figuras en el espacio y en el plano || 55
Cuerpos || 57
Armando y desarmando cuerpos || 59
Construcciones y definiciones geométricas || 61
Figuras planas || 66
Triángulos || 69
Construcciones y relaciones || 71
Cuadriláteros || 72

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 3 | CUERPOS Y FIGURAS || 181

T. P. Nº 5

Medidas y mediciones || 77
Mediciones y sistemas de medición || 79
Perímetros y áreas || 82
Cambio de unidades || 82
Áreas, volúmenes y otras medidas || 86
Fórmulas y elementos de los cuerpos || 88

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 4 | MEDICIONES Y CÁLCULO CON MEDIDAS || 193

T. P. Nº 6

Razones y proporciones || 91
Razones equivalentes || 93
Seleccionar la información || 93
Entender expresiones con letras || 95
Porcentajes e índices de variación || 96
Proporciones y repartos || 100
Controlar las proporciones || 100

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 2 | NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS || 163

T. P. Nº 7

Lugar geométrico || 103
Puntos y condiciones || 105
Circunferencia y círculo || 107
Claves para definir || 109
Mediatriz y bisectriz || 112
Más claves para definir || 115

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 3 | CUERPOS Y FIGURAS || 181

T. P. Nº 8

Relaciones entre datos || 121
Datos y representaciones || 123
Funciones de proporcionalidad || 128
Determinar una relación de proporcionalidad || 131
Gráficos estadísticos || 132
Interpretación de gráficos || 133

A.T. || ANEXO TEÓRICO | CAP. 5 | GRÁFICAS Y FUNCIONES || 207

Fotocopiar libros es un delito.

T. P. 1 | Números naturales y enteros y sus operaciones

Fotocopiar libros es un delito.

1 **a.** Después de seis años en la escuela, ya resolvieron muchos problemas en sus clases de Matemática. Escriban tres enunciados de problemas, **P1**, **P2** y **P3**, que se resuelvan con sumas, restas, multiplicaciones y/o divisiones.

P1	
P2	
P3	

b. Lean los siguientes enunciados:

- **P4:** Para terminar de pagar un auto que cuesta $25.000, sólo faltan 3 cuotas y ya se pagaron $23.200. ¿Cuánto falta pagar?
- **P5:** Martín tiene 5 años más que su prima y 6 menos que su hermano. Si la prima tiene 6 años, ¿cuántos años tiene el hermano de Martín?
- **P6:** El mes pasado Ana le debía $120 a su mamá. Este mes compró 4 libros y le pidió dinero nuevamente. Ahora le debe más de $200. ¿Cuánto gastó Ana en libros?
- **P7:** Se desea alfombrar un dormitorio que tiene 12 m² y colocar el zócalo. ¿Cuántos

EN LA CARPETA

I. Resuelvan los problemas P1, P2 y P3.
II. Revisen los enunciados para ver si requieren alguna corrección.

metros de alfombra de 2 m de ancho se necesitan? ¿Cuántos metros de zócalo se deben comprar?

■ **P8:** ¿Es posible dividir un número por 25 y obtener cociente 8 y resto 24? ¿Y dividir 25 por un número de modo que el cociente sea 8?

c. Comparen los enunciados que escribieron en **a.** con los que leyeron en **b.** Para eso, tengan en cuenta, por ejemplo, cuáles son las situaciones o los temas a los que se refieren los problemas, si la respuesta es un único número, si para resolverlos se usan todos los números que aparecen en el enunciado, si no se puede dar una respuesta con los datos que se tienen, si se usan palabras clave para indicar la operación, como *total,* cuando se usa la suma, o *repartir* si se usa la división. Luego completen el cuadro con las comparaciones que establecieron.

Problema	Tema	¿La respuesta es un único número?	¿Se usan todos los números?	¿Se puede dar una respuesta con los datos que se tienen?	¿Se usan palabras clave?
P1					
P2					
P3					
P4					
P5					
P6					
P7					
P8					

d. Comenten con un compañero todo lo que tienen en cuenta al resolver un problema en la escuela. Registren sus conclusiones en una hoja.

MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y POTENCIACIÓN

Seguramente, ya conocen muchos problemas en los que se utiliza la multiplicación, pero cuando los factores son iguales se pueden usar otras formas de escribir.
En la división, es importante tener en cuenta las relaciones entre los diferentes números que intervienen en ella.

2 Una empresa que atiende varios comedores escolares tenía organizado este menú para el mes de agosto:

MENÚ

LUNES 2 Milanesa con ensalada Fruta	**MARTES 3** Fideos con manteca Flan	**MIÉRCOLES 4** Pollo al horno con arroz Gelatina	**JUEVES 5** Filet de merluza con puré Helado	**VIERNES 6** Albóndigas con arroz Fruta
LUNES 9 Pollo al horno con arroz Gelatina	**MARTES 10** Ñoquis con salsa Flan	**MIÉRCOLES 11** Hamburguesas con ensalada Fruta	**JUEVES 12** Filet de merluza con puré Gelatina	**VIERNES 13** Albóndigas con arroz Fruta
LUNES 16 *Feriado*	**MARTES 17** Milanesa con ensalada Fruta	**MIÉRCOLES 18** Fideos con manteca Flan	**JUEVES 19** Filet de merluza con puré Helado	**VIERNES 20** Pollo al horno con arroz Gelatina
LUNES 23 Hamburguesas con ensalada Fruta	**MARTES 24** Fideos con manteca Flan	**MIÉRCOLES 25** Albóndigas con arroz Fruta	**JUEVES 26** Filet de merluza con puré Helado	**VIERNES 27** Ñoquis con salsa Flan

Cuando se envió el menú a las escuelas, muchos alumnos y padres se quejaron porque los chicos siempre comían lo mismo. El dueño de la empresa pensó, entonces, que con esos platos y esos postres se podían armar menús distintos para más de dos meses. ¿Piensan que el dueño de la empresa estaba exagerando o que tenía razón? ¿Por qué?

EN LA CARPETA

III. ¿Cómo organizarían ustedes el menú, empleando los mismos platos, para que resulte más variado?
IV. ¿Qué procedimiento utilizaron para armar el nuevo menú?

En la página 150 del Anexo teórico, en el apartado "Multiplicación y división de números naturales", pueden encontrar una manera de organizar la información cuando hay que contar variedades o combinaciones de distintos elementos.

3 **a.** Comparen el procedimiento que usaron para responder a la pregunta anterior con la forma que aparece en el Anexo teórico. ¿Cuáles son las diferencias? ¿Cuál es más ventajoso? ¿Por qué?

b. Dibujen el diagrama de árbol y escriban un cálculo* para los menús del problema anterior.

4 Determinen la cantidad de números de tres cifras que se pueden formar usando 1, 2, 3 y 4 para las centenas, 5, 6, y 7 para las decenas, y 8 y 9 para las unidades.

SE PUEDEN FORMAR EN TOTAL:

* **Interpretar una potencia**
Es importante tener en cuenta que la expresión de una potenciación, como, por ejemplo, 7^2, es una forma abreviada de escribir un producto, como 7 x 7, pero no el producto de los dos números que aparecen, o sea, 7 x 2 en el ejemplo 7^2.

5 El dueño de la misma empresa de comedores escolares quiere aumentar la cantidad de menús posibles incorporando algunos platos nuevos.

a. ¿Se obtiene la misma cantidad de menús distintos si se incluyen dos postres nuevos que si se incluyen dos platos de carne o dos de pastas? Registren cómo lo piensan.

SÍ | NO

b. ¿Se modifica mucho la cantidad de menús posibles si se combinan cuatro platos, cuatro guarniciones y cuatro postres o cinco platos, cinco guarniciones y cinco postres? ¿Por qué?

SÍ | NO

c. Si se decide mantener la misma cantidad de platos que de guarniciones y de postres, ¿cuántas variedades tendría que haber de cada uno para tener un menú diferente cada día del año escolar?

RESPUESTA:

En la página 153 del Anexo teórico, en el apartado "Potenciación y raíces de números naturales", pueden encontrar una expresión para los productos con factores iguales.

6 Escriban los cálculos que se necesitan para responder a las preguntas **b.** y **c.** del problema anterior, usando la potenciación.

7 El lunes Ana ahorró $1, el martes $2 y el miércoles $4. Pensó que si seguía así, y cada día podía ahorrar el doble que el día anterior, podría llegar a tener $256 en cierto tiempo. ¿Cuántos días tiene que ahorrar para lograrlo? Contesten en la carpeta.

EN LA CARPETA

V. Escriban el enunciado de un problema que se resuelva usando la potenciación.
VI. Comprueben con un compañero que el planteo es correcto.

Fotocopiar libros es un delito.

EN LA SALA DE ADMISIONES DE LA COMUNIDAD DE LOS NERDS...
QUERIDOS COFRADES, HOY DEBEMOS TRATAR EL INGRESO DE ZOE. ELLA ACEPTÓ SOMETERSE AL TEST DE COEFICIENTE NERD. TODOS USTEDES SON EXPERTOS EN NUESTRA CIENCIA. ¿ESTÁN DISPUESTOS A JUZGAR CON PRUDENCIA Y A DECIDIR CON JUSTICIA?
BIEN, ZOE, PROCEDAMOS. EL PRIMER PASO ES QUE COMPLETES EL PERGAMINO RITUAL QUE ESTÁ SOBRE TU ATRIL...
NO ES POR ALARDEAR, PERO CADA VEZ QUE ENTRO EN UNA MÁQUINA, ME INSTALO EN EL CORREO ELECTRÓNICO, TOMO 10 DIRECCIONES Y EN 5 MINUTOS LES MANDO UNA COPIA A TODOS. ¡SON ..... INFECTADOS CADA MEDIA HORA! ¿QUÉ TAL?
BAH... ENTONCES, TE LLEVA ..... MINUTOS CONTAGIAR A 1000 USUARIOS. ESO NO ES NADA. YO TARDO SÓLO UN MINUTO PARA ACTUAR E INFECTO 3125 USUARIOS CADA CINCO MINUTOS. ¡SON ..... CONTAGIOS POR MINUTO!
QUÉ PAVADA.
AHORA DEBES EXPLICAR A LOS HERMANOS LOS CÁLCULOS QUE TE PERMITIERON LLEGAR A ESOS RESULTADOS. POR FAVOR, ACÉRCATE AL PIZARRÓN.
MUY BIEN, SUPERASTE LA PRIMERA PRUEBA.

9 En un colegio, organizaron excursiones a la sierra con los cursos de la Secundaria básica para viajar durante tres fines de semana seguidos.

a. El primer fin de semana, viajaron los alumnos de 1º. Para dormir, se organizaron en 5 carpas de 8 chicos y en una carpa de 4. ¿Cuántos chicos fueron de campamento?

RESPUESTA:

b. El fin de semana siguiente, viajaron los de 2º. Esta vez fueron 83 chicos y para dormir se organizaron en grupos de 6. ¿Habrá alguna carpa en la que hayan dormido menos de 6? Si es así, ¿cuántos durmieron en esa carpa?

RESPUESTA:

c. Cuando viajaron los de 3º, que eran entre 40 y 50, se organizaron en grupos de 7 para dormir en carpa, pero en una de las carpas sólo durmieron 3. ¿Cuántos chicos habrán ido de campamento?

RESPUESTA:

En la página 153 del Anexo teórico, en el apartado "División entera", se analiza la relación entre números que permite resolver los problemas anteriores.

10 Revisen la resolución del problema **9** y escriban las tres divisiones que corresponden.

a.	b.	c.

11 **a.** Propongan una cuenta de dividir para cada una de las siguientes condiciones:

El dividendo es 67 y el cociente es 23	
El dividendo es 62 y el resto es 6.	

EN LA CARPETA

VII. Expliquen, utilizando un ejemplo, cómo es posible comprobar el resultado de las cuentas de dividir.

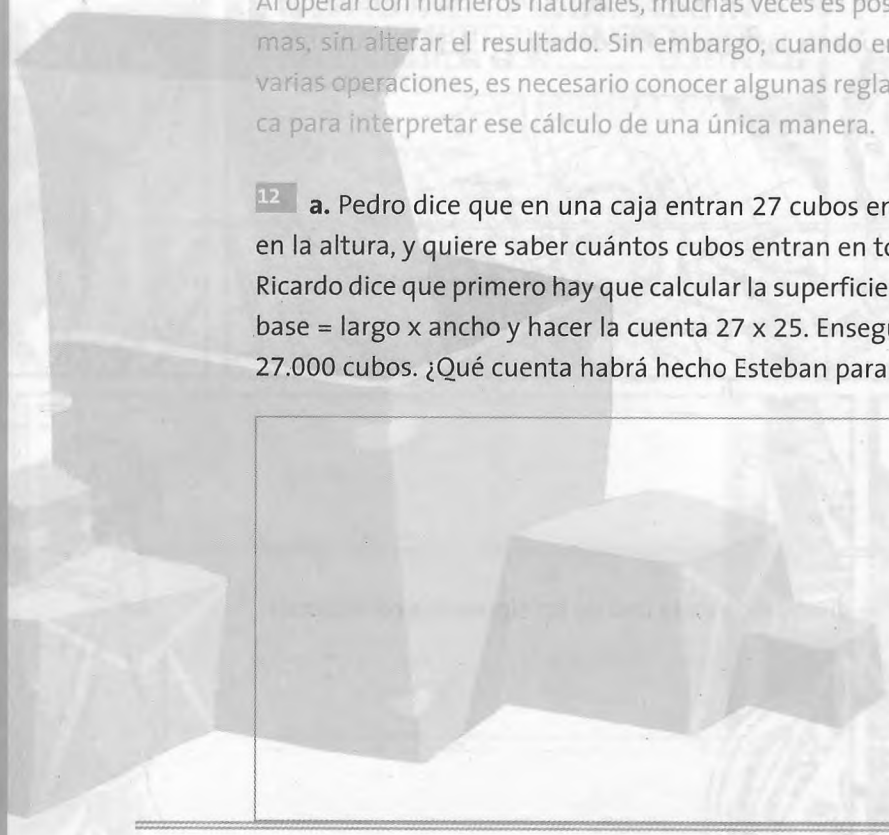
El divisor es 32 y el resto es 7.	
El cociente es 32 y el resto es 7.	
El divisor es 7 y el cociente es 14.	

b. ¿En qué casos pudieron proponer una sola cuenta? ¿En qué casos no? Expliquen por qué.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Al operar con números naturales, muchas veces es posible hacerlo de diferentes formas, sin alterar el resultado. Sin embargo, cuando en un cálculo escrito aparecen varias operaciones, es necesario conocer algunas reglas que se siguen en Matemática para interpretar ese cálculo de una única manera.

12 **a.** Pedro dice que en una caja entran 27 cubos en el largo, 25 en el ancho y 40 en la altura, y quiere saber cuántos cubos entran en total.
Ricardo dice que primero hay que calcular la superficie de la base con la fórmula sup. base = largo x ancho y hacer la cuenta 27 x 25. Enseguida, Esteban dice que entran 27.000 cubos. ¿Qué cuenta habrá hecho Esteban para terminar tan rápido?



b. Si se quieren ubicar los cubos en cajas del mismo largo y ancho, pero de menor altura, ¿cuáles podrían ser las alturas si se reemplaza cada caja por dos sin utilizar cajas de menos de 10 cubitos de altura?

c. Escriban los cálculos* que muestran cómo se obtiene el total de cubitos.

Si lo necesitan, lean el apartado "Propiedades de la multiplicación y de la división de números naturales" en la página 151 del Anexo teórico.

13 Indiquen qué propiedades de la multiplicación y de la división se pueden relacionar con las respuestas que dieron al problema **11**.

* **Multiplicar y dividir por 10, 100 y 1000**
Para facilitar los cálculos donde hay que resolver productos y cocientes, si es posible, conviene transformarlos para poder multiplicar y dividir por 10, 100, 1000, etcétera. Por ejemplo, 25 x 8 x 9 = 100 x 2 x 9 = 100 x 18 = 1800. Y para 746 : 20, conviene pensar así: 746 : 2 : 10 = 373 : 10 = 37,3

EN LA CARPETA

VIII. Sabiendo que 1771 : 7 = 253
a) Calculen 1792 : 7
b) Propongan otras cuentas que se puedan hacer a partir del primer cálculo.

14 Franco dice que para multiplicar un número por 15, por ejemplo 321 x 15, le agrega un cero a 321 y después suma la mitad de lo que le dio: 3210 + 1605 = 4815.

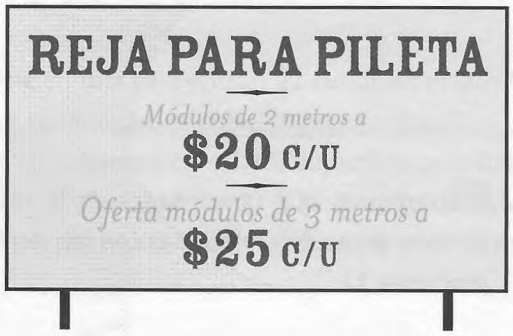
Este método ¿sirve para multiplicar cualquier número por 15? ¿Por qué?

SÍ	NO

15 Si conocen un número y su cuadrado, ¿pueden calcular el producto de ese número por su siguiente sin multiplicar? Si piensan que sí o que no, expliquen por qué.

SÍ	NO

16 Una pileta de natación rectangular tiene 8 m de largo y 4 m de ancho. Para seguridad de los niños, se quiere colocar una reja alrededor de la pileta a 1 m del borde, dejando dos aberturas de 1 m cada una para colocar puertas. En un catálogo del local Todocantri, se lee:



a. Sabiendo que no se quieren subdividir los módulos, ¿cuáles conviene comprar?

RESPUESTA:

b. ¿Qué tuvieron en cuenta para decidirse?

c. ¿Creen que alguien podría tomar otra decisión? ¿Por qué?

SÍ	NO

d. Al ser consultado sobre este caso, un vendedor de Todocantri afirmó rápidamente: "Quédese tranquilo, que con $320 le sobra". ¿Cómo obtuvo ese valor?

17 Un plomero gana $40 por hora y su ayudante, $25. Cada día, el ayudante llega a trabajar a las 8 de la mañana y el plomero, a las 10.

a. ¿Cuánto ganaron el lunes entre los dos si trabajaron hasta las 2 de la tarde?

b. ¿Cuánto ganan entre los dos si el plomero trabaja 4 horas? ¿Y si trabaja 8?

c. El ayudante gana, al menos, $50 por día y muchos días cobra más que el plomero. ¿Cuánto debe trabajar el plomero para cobrar más que su ayudante?

d. Si en una jornada cobraron $310 entre los dos, ¿es posible saber cuántas horas trabajó cada uno? ¿Por qué?

SÍ	NO

EN LA CARPETA

IX. ¿Es lo mismo el siguiente del doble y el doble del siguiente? Justifiquen la respuesta.

18 Consideren los problemas **16** y **17** para realizar lo pedido en **a.** y **b.**

a. Anoten qué operaciones tienen que hacer con la calculadora para obtener:

- Lo que cuesta la reja de una pileta si conocen la cantidad de módulos de 2 metros y la cantidad de módulos de 3 metros.
- Lo que ganan juntos el plomero y el ayudante, teniendo como dato las horas que trabajó el plomero.
- Lo que gana el plomero si el dato es el número de horas que trabajó el ayudante.

b. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. ¿Hay otras formas de resolver y obtener el mismo resultado? Expliquen.

c. Comparen las expresiones que siguen con las expresiones de los cálculos que realizaron en **a.**, y encuentren semejanzas y diferencias entre ellas.

$x \cdot 40 + x + 2 \cdot 25$	$65 \cdot x + 50$	$(x + 2) \cdot 25 + 40 \cdot x$	$x \cdot 25 + y \cdot 20$	$(x + y) \cdot 45$

Lean el apartado "El orden de las operaciones", que comienza en la página 155 del Anexo teórico, para resolver cálculos con distintas operaciones.

19 Escriban un cálculo con paréntesis que muestre el procedimiento que realizaron en el ítem **a.** del problema **18**.

1 | EJERCITACIÓN

20 Determinen, para cada caso, cuál de las expresiones es mayor:
a. El doble de tres al cuadrado o el triple de dos al cubo.
b. La mitad del triple de un número o la tercera parte del doble del mismo número.
c. 3×3 ó 3^3.
d. 33^3 ó $3^{3 \times 3}$.
e. La raíz cuadrada de 36 o la raíz cúbica de 64.

21 A partir de las siguientes cuentas, obtengan lo pedido en cada ítem: $24 \times 6 = 144$ $24 \times 50 = 1200$
a. Calculen 24×56.
b. Expliquen cómo lo hicieron y por qué.
c. Propongan otra multiplicación que se pueda hacer a partir de las mismas cuentas.

22 A partir de $25 \times 83 = 2075$, resuelvan las consignas de los ítem **a.** y **b.**
a. ¿Cómo se hace para calcular el doble de 25 por 83? ¿Y el doble de 25 por el triple de 83?
b. Expliquen cómo lo hicieron y por qué.

23 Sabiendo que $46 \times 18 = 488$, resuelvan las consignas de los ítem **a.** y **b.**
a. ¿Cómo hacen para calcular la mitad de 46 por el doble de 18?
b. Expliquen cómo lo hicieron y por qué.

24 Con la calculadora pueden verificar que $374 : 17 = 22$. A partir de ese resultado, sin usar la calculadora y haciendo cálculos muy simples, indiquen el resultado de las siguientes operaciones y expliquen por qué lo hicieron así:
■ $37.400 : 17 =$ ■ $374 : 34 =$ ■ $374 : 22 =$ ■ $374 : 11 =$

25 ¿Qué resultado obtienen si hacen 89 dividido 7 con la calculadora? ¿Cómo pueden hacer para obtener el resto de esa división con la calculadora?

26 Escriban cómo calcular $1000 : 43$ usando en cada caso solamente la operación indicada:
a. Usando sumas.
b. Usando multiplicaciones.
c. Usando sólo la resta.

27 **a.** Determinen qué cantidad de cifras enteras tiene el cociente en las siguientes divisiones:
■ $6284 : 46$ ■ $16314 : 804$ ■ $4035 : 95$
b. Expliquen su procedimiento.

2 | MÁS PROBLEMAS

28 En la primera ronda de un campeonato de truco entre dos clubes, quedaron seis parejas finalistas. Si se anotaron cuatro parejas de un club y todos jugaron contra todos, ¿cuántas parejas eran del otro club?

29 **a.** Lean el apartado "Sistemas de numeración", en la página 10 del Anexo teórico, y escriban el valor de cada uno de los símbolos de los sistemas aditivos; para el caso de los sistemas posicionales, escriban los tres valores menores posibles de cada uno de los símbolos.
b. En los apartados "Suma y resta de números naturales", "Multiplicación y división de números naturales" y "Potenciación y raíces de números naturales", en las páginas 11, 16 y 19, respectivamente, del Anexo teórico, se caracteriza cada una de esas operaciones. Escriban frases que vinculen suma con multiplicación, resta con división y multiplicación con potenciación.

30 El producto de dos números, p y q, es 8124. A partir de este dato, respondan:
¿Es posible conocer el producto del doble de p por el triple de q?

31 Con la siguiente información acerca de los precios de artículos de librería, redacten enunciados de problemas que se puedan resolver con los siguientes cálculos :
a. 100 – (3 x 15 + 12) **b.** 100 – 3 x (15 + 12) carpeta $15 | libro $45 | calculadora $100| birome $3 | cartuchera $12 | lápiz negro $1 | marcadores $27 | escuadra $3.

32 ¿Es posible que en una cuenta de dividir el dividendo sea 46, el cociente sea 13 y el resto sea 1? ¿Por qué?

33 **a.** Lean las propiedades de la suma, de la resta, de la multiplicación y de la división de números naturales en las páginas 12 y 17 del Anexo teórico.
b. Establezcan todas las relaciones posibles entre dichas operaciones y escríbanlas.

3| PROBLEMAS PARA REPASAR

34 Analicen las formas de multiplicar que se describen a continuación, justifiquen los procedimientos utilizados y compárenlos con los que se utilizan habitualmente.
a. En el antiguo Egipto, multiplicaban mediante duplicaciones sucesivas. Por ejemplo, para multiplicar 76 por 13, procedían así:
76 (1 vez 76) 76 + 76 = 152 (2 veces 76) 152 + 152 = 304 (4 veces 76) 312 + 312 = 608 (8 veces 76)
Luego, para saber cuánto era 13 veces 76, hacían lo siguiente:
13 veces 76 = 8 veces 76 + 4 veces 76 + 1 vez 76 13 veces 76 = 608 + 304 + 76 13 veces 76 = 988
b. En algunas zonas de Rusia, multiplicaban de una manera muy interesante.
Por ejemplo, para multiplicar 32 por 12, colocaban los factores encabezando dos columnas. En el segundo casillero de la columna de la izquierda, colocaban la mitad del factor que la encabezaba; luego, la mitad de la mitad de ese factor, y así sucesivamente. En el segundo casillero de la columna de la derecha, colocaban el doble del factor que la encabezaba; luego, el doble del doble de ese factor, y así sucesivamente.

32	**12**
16	24
8	48
4	96
2	192
1	384*

Luego marcaban con un asterisco el número de la columna de la derecha que correspondía a 1, que es el resultado de la multiplicación. Es decir, 32 x 12 = 384.
Si alguna mitad no era un número natural, colocaban sólo la parte entera en la columna de la izquierda y marcaban con un asterisco el número correspondiente en la columna de la derecha. También marcaban con asterisco el número correspondiente a 1. Por ejemplo, si tenían que multiplicar 45 por 5, procedían así:

45	5*
22	10
11	20*
4	40*
2	80
1	160*

En este caso, en que hay más de un número marcado con asterisco, el resultado es la suma de esos números.
160 + 40 + 20 + 5 = 225

T. P. 2 | Números naturales: divisibilidad y regularidades

1 Realicen las siguientes consignas a partir de esta tabla de números:

14	8	2	10
28	16	4	20
21	12	3	15
35	20	5	25

a. Escojan cuatro números de tal forma que sólo haya un número de cada fila y de cada columna, por ejemplo, 28, 20, 3 y 10, y calculen el producto de todos ellos.

[ ] x [ ] x [ ] x [ ] = [ ]

b. Escojan otros cuatro números de la misma forma, efectúen su multiplicación y comparen el producto con el obtenido en **a.**

[ ] x [ ] x [ ] x [ ] = [ ]

c. Obtengan otros productos con la misma regla y compárenlos con los anteriores. ¿Cómo explicarían lo obtenido?

d. ¿Existe alguna relación entre los números de la tercera columna y los de la cuarta? ¿Y entre los de la tercera y la primera? Tomen la tercera columna como eje del análisis.

EN LA CARPETA

I. Escriban un listado de conclusiones respecto de los puntos **c** y **d** del ejercicio número 1.
II. Discutan en grupos para determinar cuáles tienen validez, y registren las conclusiones seleccionadas.

2 En la nueva Ruta Verde, de 240 km de largo, han colocado:

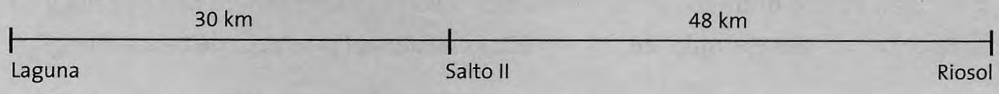
- cabinas telefónicas cada 12 km,
- puestos sanitarios cada 30 km,
- estaciones de servicio cada 15 km.

a. Si en el kilómetro 0 existen los tres servicios, ¿en qué kilómetros vuelven a coincidir los tres?

b. Si la ruta se extiende 60 km más, al final de este nuevo tramo, ¿volverán a coincidir? ¿Por qué?

c. ¿Qué característica tienen los números de los kilómetros en que coinciden los tres servicios?

3 La Ruta Verde se cruza en la ciudad de Salto II con una carretera que la une con las ciudades de Laguna y Riosol.



En esa carretera, se deben colocar señales según estas condiciones:

- A la entrada de cada ciudad, debe haber una señal.
- Entre dos señales consecutivas, la distancia debe ser siempre la misma.
- Dos señales consecutivas deben estar separadas por la mayor distancia posible.

a. ¿Cuántos kilómetros separan una señal de la otra?

RESPUESTA:

b. ¿Cuántas señales se deben colocar en total?

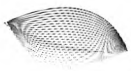
RESPUESTA:

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Entre los números naturales, se dan las relaciones de múltiplos y divisores, que resultan útiles para resolver distintos problemas*. Además, estas relaciones sirven para reconocer otras propiedades que muestran las características de este campo numérico.

4 Para armar ofertas de golosinas, don Héctor cuenta con 60 chupetines, 75 galletitas con chocolate y 120 caramelos. Quiere armar bolsitas iguales que contengan el mayor número posible de cada cosa.
¿Cómo pueden averiguar las cantidades? ¿Cuántas bolsitas se pueden armar?

5 Además, don Héctor tiene una caja de bolitas que quiere colocar en bolsas que contengan la misma cantidad.
Si coloca 2 en cada una de las bolsas, le queda una suelta. Pero si coloca 3 en cada una, le sobran 2. En cambio, al colocar 4, le sobran 3.
Finalmente, logra armar bolsas con 5 bolitas cada una, sin que queden sueltas.
¿Con cuántas bolitas contaba don Héctor si en la caja había más de 70 y menos de 100? ¿Cómo lo averiguaron?



6 Una fábrica produce pequeños envases rectangulares de dos tipos:
Tipo A: 8 cm de alto, 4 cm de ancho y 2 cm de profundidad.
Tipo B: 6 cm de alto, 6 cm de ancho y 1 cm de profundidad.
¿De qué dimensiones se puede hacer una caja que contenga, sin dejar espacios vacíos, por lo menos 4 envases de tipo A o de tipo B? En una hoja, escriban sus cálculos y compárenlos con los de otros compañeros.

* **Simular para resolver**
Algunas veces conviene, después de leer un problema, hacer un esquema de la situación y anotar los datos útiles para encontrar las pistas con las cuales resolverlo. Simular la situación puede servir para decidir qué procedimiento utilizar.

EN LA CARPETA

III. Realicen esquemas que simulen las situaciones de los problemas 4, 5 y 6.

7 ¿Son los números 63 y 54 múltiplos de 3? ¿La suma de estos números es múltiplo de 3? ¿Y su diferencia?

SÍ ☐ NO ☐ | 63 + 54 = ☐ | SÍ ☐ NO ☐ | 63 – 54 = ☐ | SÍ ☐ NO ☐

8 ¿Cuál es la diferencia entre dos múltiplos consecutivos de 7?¿Y la de dos múltiplos de 37? ¿Y la de 183?

☐ ☐ ☐

En la página 153 del Anexo teórico, bajo el título "División entera", se analiza la relación entre los números que intervienen en ella. Esto sirve de ayuda para completar la tabla ubicada a la derecha de esta página.

9 ¿Cuál es el menor número que se debe restar a los números ubicados en la primera fila para que sean divisibles por los que se encuentran encolumnados?

	360	451	492	500	670	782	810	895	900	1000	1453
2											
3											
5											
7											
10											

10 En ocasiones, suelen utilizarse, e incluso inventarse, reglas para recordar números. La siguiente información sirve para averiguar el número de documento del profesor de Matemática de 7º.

El número tiene 7 cifras, todas diferentes, y formando grupos de 3 cifras seguidas, siempre resulta un número divisible por 17.

¿Cuál es el número en cuestión? ¿Es único? ¿Por qué?

☐ | SÍ ☐ NO ☐

Fotocopiar libros es un delito

11 En un control policial, se decidió examinar los frenos cada 6 automóviles; la documentación, cada 10 y las luces reglamentarias, cada 15. Si a un vehículo se le realizó una revisión completa, ¿cuántos serán examinados después de éste para que nuevamente se realice una revisión completa?

RESPUESTA:

En el apartado "Múltiplos y divisores", en la página 156 del Anexo teórico, se definen las relaciones entre múltiplo y divisor que permiten avanzar con los siguientes problemas.

12 **a.** Dado un número natural cualquiera, ¿cuál es su divisor más pequeño? ¿Y el mayor? ¿Se cumple para cualquier número natural? ¿Por qué?

SÍ | NO

b. Si un número es divisor de otro, ¿también lo es de los múltiplos de éste? ¿Por qué?

SÍ | NO

c. Dado un número natural cualquiera, ¿cuál es su múltiplo menor? ¿Y el mayor?

d. La suma de varios múltiplos de un número ¿también es múltiplo de dicho número? Expliquen su respuesta.

EN LA CARPETA

IV. Expliquen qué relaciones entre múltiplos y divisores les permitieron resolver los problemas del punto 12.

Fotocopiar libros es un delito. Fotocopiar libros es un delito.

13 **a.** ¿Cuáles son los números que tienen sólo dos divisores distintos? ¿Cómo lo averiguaron?

b. La suma de dos números primos ¿es un número primo? ¿Siempre? ¿Por qué?

c. El producto de números primos ¿es un número primo? Justifiquen su respuesta.

SÍ	NO

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Mediante los criterios de divisibilidad, se puede reconocer si un número es o no divisible por otro sin necesidad de hacer todas las cuentas. Estos criterios son útiles para resolver las siguientes situaciones.

14 **a.** Escriban dos criterios de divisibilidad* que recuerden.

b. Los criterios de divisibilidad ¿dependen del sistema de numeración que utilizamos? Discutan la respuesta con un compañero y escríbanla en una hoja.

* **Condiciones numéricas**
Para entender mejor una condición que se cumple para muchos números, es conveniente buscar varios ejemplos. Esto no sirve como demostración matemática, pero sirve para buscar argumentos de lo que se intenta probar.

15 Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

	V	F
■ Si un número es divisible por 6, entonces, es divisible por 3.		
■ Si un número es divisible por 3, entonces, es divisible por 6.		
■ Si un número es divisible por 3 y por 5, entonces, es divisible por 15.		
■ Si un número es divisible por 7, entonces, no es divisible por 2.		
■ Si un número no es divisible por 4, entonces, no es divisible por 2.		
■ Si un número es divisible por 16, entonces, es divisible por 8 y por 4.		

16 El número de chanchos en un criadero es menor que 1000. Agrupados de a 5, de a 6, de a 9 o de a 11, siempre sobra 1. ¿Cuántos son los chanchos?

RESPUESTA:

17 Dibujen en una hoja un segmento AB de 21 cm de largo. Dividan el segmento AB en segmentos de 7 cm cada uno.
¿Es posible dividir en segmentos de 7 cm, sin que sobre ni falte un tramo, segmentos cuya longitud sea

	SÍ	NO
■ el doble de la del segmento AB?		
■ el triple de la del segmento AB?		
■ cinco veces la longitud del segmento AB?		
■ la mitad de la del segmento AB?		
■ la tercera parte de la del segmento AB?		

18 El segmento CD se puede dividir en partes iguales de 5 cm cada una. A la vez, el segmento CD entra un número exacto de veces en el segmento MN. ¿Puede dividirse el segmento MN en segmentos de 5 cm cada uno? Expliquen su respuesta.

SÍ	NO

EN LA CARPETA

V. Justifiquen por escrito las respuestas del ejercicio número 15. Luego discútanlas con sus compañeros.

fotocopiar libros es un delito

PATRONES NUMÉRICOS

La forma en que se representan los números y las operaciones que realizamos con ellos, nos permite reconocer colecciones de números que respetan determinadas reglas, entre ellas:

2, 4, 6, 8, ...	NÚMEROS PARES.
1, 3, 5, 7, ...	NÚMEROS IMPARES.
24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1	DIVISORES DE 24, O SEA, QUE LO DIVIDEN EN FORMA EXACTA CON RESTO 0.
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...	CADA NÚMERO, EXCEPTO EL PRIMERO, SE OBTIENE A PARTIR DE LA SUMA DE LOS DOS QUE LO ANTECEDEN.

19 **a.** Estas sucesiones siguen una regla; completen con los 5 elementos siguientes:

1, 2, 4, 8, 16,					
2, 20, 200,					
5, 15, 45, 135,					

b. En las sucesiones, se puede identificar cada número con el lugar que ocupa en ella. Por ejemplo, en la primera del **19 a.**, el 1 ocupa el primer lugar; el 2, el segundo; el 4, el tercero, y así sucesivamente. En cada caso, busquen el número que ocupa el lugar 100. ¿Cómo lo averiguaron?

RESPUESTA:

RESPUESTA:

RESPUESTA:

20 En una hoja, escriban los cinco primeros elementos de una sucesión e intercámbienla con un compañero. Deben descubrir la regla de la sucesión que hayan recibido.

21 La ubicación de las fichas permite reflexionar sobre ciertas regularidades.

a. ¿Qué color tendrá la ficha que ocupa el lugar 415? ¿Y la del lugar 20.000?

EL LUGAR 415:

EL LUGAR 20.000:

b. ¿Qué color tendrá la ficha que ocupe el lugar 54? ¿Y la del lugar 27? ¿Es gris la del lugar 41?

EL LUGAR 54: EL LUGAR 27: EL LUGAR 41:

c. ¿Qué color tendrá la ficha que ocupe el lugar 32? ¿La del lugar 45 es celeste?

EL LUGAR 32: EL LUGAR 45:

22 Imaginen que cuentan con infinitas fichas de un lado blancas y del otro lado negras. Se encuentran alineadas mostrando su lado blanco. También tienen infinitos amigos que, a medida que se acercan a la hilera de fichas, deciden cambiar su color. El primero cambia el estado de las fichas de dos en dos.
Terminado su trabajo, aparece otro que, empezando por la tercera, las cambia de tres en tres; luego viene quien las cambia de cuatro en cuatro, y así sucesivamente.

a. ¿Cómo continúa la secuencia planteada? ¿Pueden explicar qué va sucediendo a medida que pasan los distintos amigos? ¿Se puede anticipar el color de ficha correspondiente a cada número?

b. Si los cambios de fichas se hacen hasta la número 125, ¿cuántas fichas blancas hay?

c. Entonces, al pasar los infinitos amigos, ¿qué fichas aún muestran su lado blanco?

EN LA CARPETA

VI. Busquen dos números de cuatro cifras cuya primera y última sea 6, y que sean divisibles por 3, 4 y 11.

23 El día 1 de octubre del año 2004 es viernes. Con este dato, resuelvan las siguientes consignas:

a. Completen el calendario del mes de octubre de 2004.

DOMINGO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO

b. ¿Existe alguna relación entre cada número y el que se encuentra justo debajo? ¿Ocurre siempre lo mismo? ¿Por qué?*

c. Seleccionen, en el calendario, cuatro números que formen un cuadrado, por ejemplo:

7	8
14	15

Luego sumen las diagonales. ¿Qué sucede? ¿Y si eligen otros cuatro números?

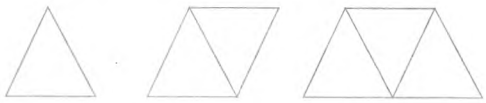
d. Elijan tres números consecutivos que estén en la misma línea. En una hoja, sumen los de los extremos e indiquen qué relación tiene esa suma con el número del centro. Prueben con varias ternas de números. Escriban sus conclusiones en la hoja usada e intenten comprobar si se ajustan a cualquier mes calendario.

* **Explicar por qué**
Para explicar el por qué de una afirmación, es necesario recurrir a ideas que ya conocen y han confirmado. Recuerden que los ejemplos con números sirven para buscar pistas, pero no para demostrar lo que se afirma.

24 Después de leer esta conversación, averigüen la edad de Margarita:

–¿Cuántos años tiene Margarita?
–No te lo voy a decir, pero te doy una pista: su hermana le lleva 6 años y ella nació cuando su madre tenía 27.
–No estoy segura de si tiene 55 ó 57.

25 Construyan con palillos estructuras como las siguientes:



a. Completen la tabla con las cantidades de palillos necesarias.

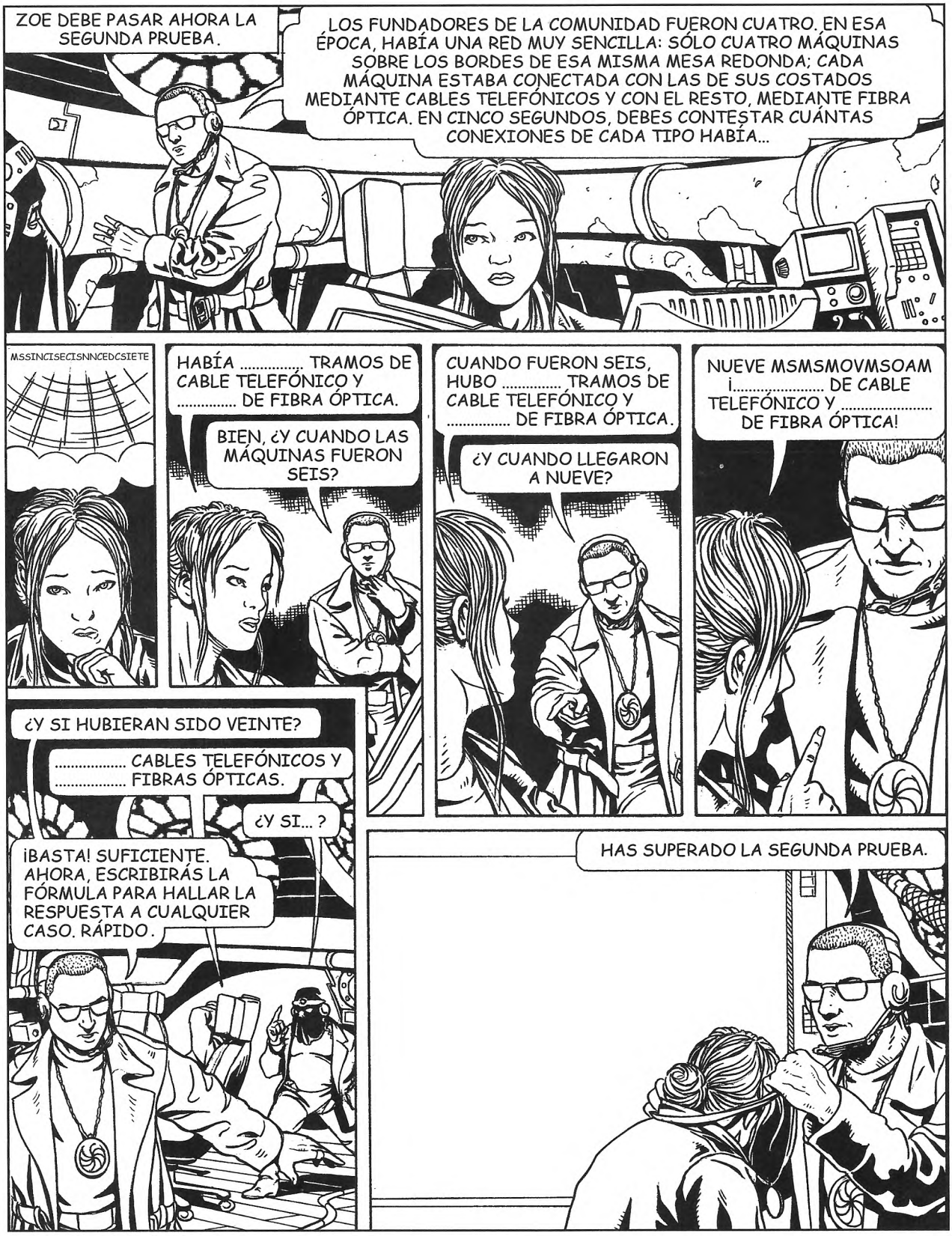
Triángulos	Palillos
2	
5	
	15
300	

b. Escriban con palabras la relación que existe entre el número de palillos y la cantidad de triángulos que pueden formar con ellos.

c. En pequeños grupos, decidan cuáles son las formulaciones correctas y cuáles no. Justifiquen en una hoja su selección. Si es necesario, reagrupen las que consideren similares.

EN LA CARPETA

VII. Escriban una fórmula para poder calcular el número de palillos del ejercicio 25 teniendo en cuenta que n es el número de triángulos.


ZOE DEBE PASAR AHORA LA SEGUNDA PRUEBA.
LOS FUNDADORES DE LA COMUNIDAD FUERON CUATRO. EN ESA ÉPOCA, HABÍA UNA RED MUY SENCILLA: SÓLO CUATRO MÁQUINAS SOBRE LOS BORDES DE ESA MISMA MESA REDONDA; CADA MÁQUINA ESTABA CONECTADA CON LAS DE SUS COSTADOS MEDIANTE CABLES TELEFÓNICOS Y CON EL RESTO, MEDIANTE FIBRA ÓPTICA. EN CINCO SEGUNDOS, DEBES CONTESTAR CUÁNTAS CONEXIONES DE CADA TIPO HABÍA...
MSSINCISECISNNCEDCSIETE
HABÍA ..... TRAMOS DE CABLE TELEFÓNICO Y ..... DE FIBRA ÓPTICA.
BIEN, ¿Y CUANDO LAS MÁQUINAS FUERON SEIS?
CUANDO FUERON SEIS, HUBO ..... TRAMOS DE CABLE TELEFÓNICO Y ..... DE FIBRA ÓPTICA.
¿Y CUANDO LLEGARON A NUEVE?
NUEVE MSMSMOVMSOAM ¡..... DE CABLE TELEFÓNICO Y ..... DE FIBRA ÓPTICA!
¿Y SI HUBIERAN SIDO VEINTE?
..... CABLES TELEFÓNICOS Y ..... FIBRAS ÓPTICAS.
¿Y SI... ?
¡BASTA! SUFICIENTE. AHORA, ESCRIBIRÁS LA FÓRMULA PARA HALLAR LA RESPUESTA A CUALQUIER CASO. RÁPIDO.
HAS SUPERADO LA SEGUNDA PRUEBA.

1 | EJERCITACIÓN

27 **a.** Construyan una tabla como la siguiente, pero de 15 filas por 15 columnas, y complétenla:

ES MÚLTIPLO DE...	1	2	3	4	5
1					
2					

b. ¿Dónde se "ven" los múltiplos de 2? ¿Y los de 3, de 7, etcétera?
c. ¿Dónde están los divisores de 12?
d. ¿Cómo encuentran en la tabla los números primos? ¿Y los compuestos?
e. ¿Qué observan en la diagonal descendente, de izquierda a derecha? ¿Por qué?

28 Consideren que n se puede escribir de acuerdo con el siguiente producto:
$n = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

	V	F
■ 27 es divisor de n.		
■ 36 es divisor de n.		
■ 45 es divisor de n.		
■ 120 es divisor de n.		

29 Al dividir un número natural por 11, se obtiene resto 5.
a. ¿Es ese número múltiplo de 11?
b. ¿Cuál es el menor número que hay que sumarle para obtener un múltiplo de 11?
c. ¿Y el menor que hay que restarle?

30 Si $a = 2^2 \times 3 \times 7$ y $b = 2 \times 3^2 \times 5$, escriban todos los divisores de a y de b.

31 Busquen las definiciones de máximo común divisor y mínimo común múltiplo en las páginas 26 y 27, respectivamente, del Anexo teórico, y úsenlas para resolver las actividades que siguen.
a. Calculen el divisor común mayor entre:
■ 70 y 90. ■ 25, 60 y 90. ■ 15 y 40. ■ 24, 30 y 36.
b. Escriban tres números, a, b y c, de modo que mcd $(a, b, c) = 5$.
c. Calculen el múltiplo común menor entre:
■ 12 y 14. ■ 20 y 75. ■ 100, 25 y 40. ■ 8, 12 y 20.

32 **a.** ¿Qué número de tres cifras es divisible por 4 y por 9 si posee un 3 en el lugar de las decenas?
b. Expliquen cómo lo averiguaron.

33 El número 1234 no es divisible por 11.
a. Cambien sus cifras de lugar para obtener un número que sí lo sea.
b. La solución ¿es única?

2 | MÁS PROBLEMAS

34 Una abuela tiene siete amigas. La primera la visita cada tarde; la segunda, una tarde sí y otra no; la tercera, cada tres tardes y así sucesivamente, hasta la séptima, que la frecuenta cada siete tardes.
a. ¿Cada cuántos días tiene la abuela que preparar té para ocho?
b. ¿Y sólo para dos?

35 **a.** ¿Son correctas las siguientes descomposiciones? ¿Son únicas?
■ $54 = 3 \times 3 \times 6$ ■ $63 = 3 \times 3 \times 7$ ■ $102 = 2 \times 6 \times 7$ ■ $24 = 4 \times 3 \times 2$
b. Expliquen sus respuestas.

36 **a.** Julieta tenía 56 galletitas para repartir entre cierto número de gatos y perros. Si le dio 6 galletitas a cada perro y 5, a cada gato, ¿cuántos gatos y perros fueron alimentados? **b.** ¿La respuesta es única? ¿Por qué?

37 Dos ruedas dentadas, A y B, funcionan de manera acoplada. Tienen, respectivamente, 18 y 72 dientes.
a. ¿Cuántas vueltas completas debe dar A para que B realice un número completo de vueltas?
b. ¿Cuántas vueltas dio B?

38 **a.** Observen los siguientes productos:
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12.321
1111 x 1111 = 1.234.321
b. Completen los siguientes productos.
11.111 x 11.111 =
111.111 x 111.111 =
c. ¿Cómo les parece que continúa? ¿Por qué?

39 Los números pares son 0, 2, 4, 6, ..., que se pueden expresar como $2 \cdot n$. ¿Cómo se pueden expresar los impares?

40 **a.** Descubran si los resultados de los siguientes cálculos son números pares o impares. No olviden explicar sus repuestas.
- par + par =
- par + impar =
- impar + impar =
- par · par =
- par · impar =
- impar · impar =

b. En la lista anterior, ¿por qué no figuran las opciones impar + par e impar · par?

41 Escriban un número de cuatro cifras que sea divisible por 3 y por 5, y que
a. sea el menor posible,
b. sea el mayor posible,
c. tenga las cuatro cifras distintas,
d. tenga sólo dos cifras iguales.

3 | PROBLEMAS PARA REPASAR

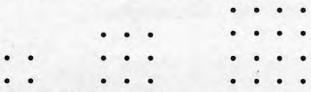
42 **a.** En grupos de dos compañeros, realicen las siguientes operaciones con distintos números:
- Piensen un número.
- Multiplíquenlo por 2.
- Sumen 1 al resultado.
- Resten el número pensado.

b. ¿Qué relación existe entre el número pensado y el que se obtiene al final de operar?
c. Escriban sus conclusiones y compartan su trabajo con otros compañeros.

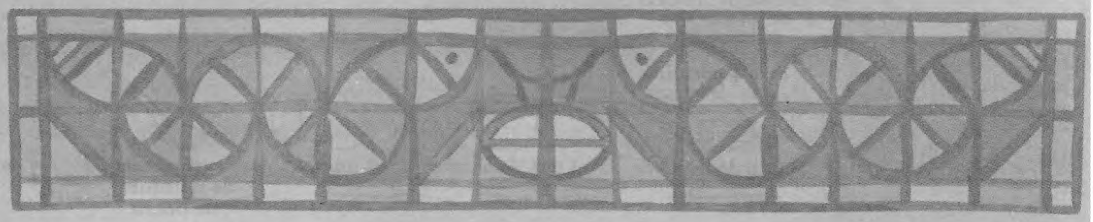
43 **a.** Presten atención al siguiente enunciado, que parece un trabalenguas:
Elijan un número de tres cifras (que no sea capicúa ni tenga ceros) y consideren el que resulte de invertir sus cifras. Resten el menor del mayor y al resultado súmenle el que resulte de invertir sus propias cifras.
b. ¿Cuál es el resultado? ¿Por qué?

44 Si cada número se representa por una cantidad de puntos, los números triangulares son aquellos cuyos puntos forman triángulos equiláteros, por ejemplo:

Si podemos formar cuadrados, estamos en presencia de números cuadrados, como en los siguientes números:



a. Encuentren números triangulares y cuadrados.
b. ¿Existen números triangulares que son, a la vez, números cuadrados?
c. El número 1 ¿es triangular o cuadrado? ¿Por qué?



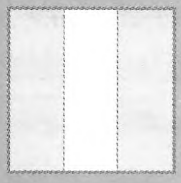
T. P. 3 | Números racionales positivos y sus operaciones

1 Alejandro compró un lavarropas que costaba 690 pesos. Le ofrecieron pagarlo sin recargo haciendo una entrega de $500 y el resto en cuatro cuotas iguales. ¿Cuánto tendrá que pagar por cuota?

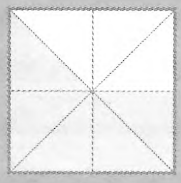
RESPUESTA:

2 **a.** ¿Qué relación existe entre la parte sombreada y el cuadrado?

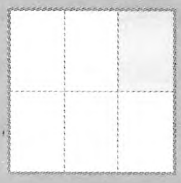
b. ¿Y entre la parte sombreada y la parte no sombreada?



a)
b)

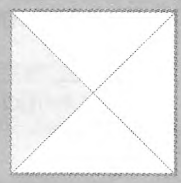


a)
b)



a)
b)

a)
b)

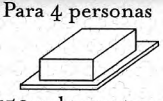


EN LA CARPETA

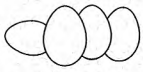
I. En una empresa, 4 de cada 7 empleados tienen a lo sumo 10 años de antigüedad y 3 de cada 8 empleados, 20 o más años de antigüedad. Si la empresa tiene 504 empleados, ¿cuántos de ellos tienen entre 10 y 20 años de antigüedad?

3 Martina quiere preparar una torta para 6 personas. Si la receta para 4 personas es la que aparece a continuación, ¿cuánto necesita de cada ingrediente?

Para 4 personas


150 g de manteca

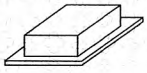
1 taza de harina

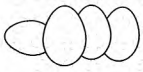

4 huevos

1 cucharadita de ralladura de limón

$\frac{3}{4}$ taza de azúcar

Para 6 personas





4 Completen los enunciados siguientes para que sean problemas en cuya resolución se usen fracciones o decimales.

a. Una pista de atletismo tiene una longitud de 400 m.

b. Paula compró 5 cajas de alfajores.

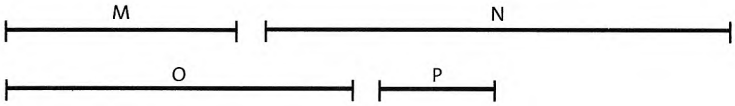
c. En un edificio, viven 15 familias.

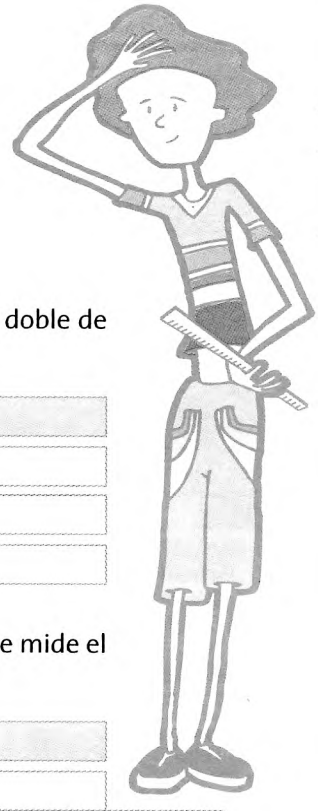
d. Reúnanse con un compañero y comparen los problemas que inventaron. Anoten las similitudes y las diferencias en una hoja.

USOS Y REPRESENTACIONES

Si bien ya han resuelto e inventado algunos problemas con fracciones y decimales, es posible resolver otros diferentes de los conocidos. Es importante tener en cuenta que los números racionales expresan un cociente entre números naturales para vincular las escrituras fraccionaria y decimal de estos números, y también para representarlos en la recta numérica.

5 Sin utilizar la regla graduada, resuelvan los siguientes ítem:





a. Si consideran que la unidad de medida es M, ¿cuánto miden N, O y P?

N		O		P	

b. ¿Cuál será la medida de N, O y P considerando otra unidad que mide el doble de M? ¿Y si la nueva unidad mide la mitad de M?

UNIDAD DOBLE DE M		UNIDAD MITAD DE M	
N		N	
O		O	
P		P	

c. ¿Cuál será la medida de M considerando como unidad un segmento que mide el doble de N? ¿Y si mide la mitad de N?

UNIDAD DOBLE DE N		UNIDAD MITAD DE N	
M		M	

Lean el apartado "Usos de los números racionales positivos" en la página 163 del Anexo teórico.

6 Averigüen si las maneras que se describen para medir un segmento ¿son las mismas, más fáciles o más precisas que las que utilizaron en el problema anterior?

EN LA CARPETA

II. Escriban cuál de las maneras de medir un segmento les resultó más fácil y más precisa y expliquen por qué.

7 Dibujen la unidad si el siguiente segmento ⊢——⊣ mide

a. $\frac{1}{4}$ de la unidad.

b. $\frac{2}{3}$ de la unidad.

c. $\frac{5}{4}$ de la unidad.

8 Dibujen la unidad si el área del círculo es

a. $\frac{1}{3}$ de la unidad.

b. $\frac{2}{5}$ de la unidad.

c. $\frac{4}{3}$ de la unidad.

9 Reconstruyan la unidad si el dibujo representa

a. $\frac{2}{5}$ de la unidad.

b. $\frac{4}{3}$ de la unidad.

¿FALTA GENTE?
NO; AHORA HAY TRES MÁQUINAS CADA DOS PERSONAS. EN TOTAL, HAY QUINCE MÁQUINAS.
¿HAY SÓLO ..... MIEMBROS EN LA COMUNIDAD?
EN EFECTO. SI TÚ PASAS LAS DOS ÚLTIMAS PRUEBAS, SERÁS LA NÚMERO ..... . LLEGAMOS A LA MITAD DE LA CEREMONIA. OTRA VEZ DEBO PEDIRTE QUE MIRES LA LÁMINA.
LO QUE ESTÁ FATAL ES EL TEMA DE LOS ANTIVIRUS, HERMANO. EL OTRO DÍA, DE SETENTA Y CINCO MÁQUINAS ME REBOTARON EN SESENTA Y NUEVE.
¿Y? PEOR ME FUE A MÍ. DE VEINTICINCO INTENTOS FRACASÉ EN VEINTITRÉS.
PERO, ÓYEME. TE ESTOY DICIENDO QUE ENTRÉ SÓLO EN ..... MÁQUINAS. ¿ENTIENDES?
¿CUÁL ES LA DUDA? NO ENTIENDO EL PROBLEMA.
DEBES CONTESTAR CUÁL DE LOS DOS ENFRENTÓ UN ANTIVIRUS MÁS EFICIENTE.
ESO ES SENCILLO: .....
HAS SUPERADO LA TERCERA PRUEBA.
GRAN MAESTRE, SEGÚN USTED, EN ESTA HABITACIÓN HAY ..... PERSONAS, ¿VERDAD?: USTEDES ..... MÁS YO.
ES CIERTO, ¿Y?
HE CONTADO ..... : UNO MÁS.
¡HORROR! HAY UN INFILTRADO... ESTO ES GRAVÍSIMO. ES NECESARIO DISIMULAR HASTA QUE LO DESCUBRAMOS.
DÉJELO POR MI CUENTA...

Si lo necesitan, lean el apartado "Equivalencia" en la página 167 del Anexo teórico.

11 **a.** Identifiquen y escriban dos pares de fracciones equivalentes que aparezcan en el problema **10**.

_____ = _____ _____ = _____

b. Expliquen cómo puede interpretarse la equivalencia en cada caso.

CASO 1	
CASO 2	

12 **a.** ¿Cómo son las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{m \cdot a}{m \cdot b}$, donde m representa cualquier número natural?

b. Busquen fracciones equivalentes a $\frac{4}{7}$. ¿Hay más de una? ¿Cómo las obtuvieron?

SÍ	NO

c. Busquen fracciones equivalentes a $\frac{15}{45}$. ¿Hay más de una? ¿Cómo las obtuvieron?

SÍ	NO

13 ¿En qué casos es posible encontrar una fracción equivalente cuyo denominador sea potencias de 10? Justifiquen por qué.

a. $\frac{3}{4}$

SÍ	NO

b. $\frac{2}{3}$

SÍ	NO

c. $\frac{4}{25}$ | SÍ | NO

d. $\frac{5}{11}$ | SÍ | NO

Si lo necesitan, antes de resolver el problema **14**, lean el apartado "Expresión decimal" en la página 165 del Anexo teórico.

14 Sin hacer la división, indiquen en qué casos alcanzan seis cifras decimales para escribir en forma decimal las fracciones del problema **13**. Expliquen por qué.

15 **a.** Sin hacer la división, escriban tres fracciones no equivalentes entre sí que puedan expresarse* mediante:

- Una expresión decimal finita.
- Una expresión decimal periódica.

b. ¿Cómo encontraron las fracciones y qué tuvieron en cuenta para hacerlo?

16 **a.** Considerando que $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$, busquen una fracción que exprese cada uno de los siguientes números:

- $1,\widehat{3}$
- $0,\widehat{6}$
- $4,\widehat{6}$

* **Escrituras equivalentes**

Cuando se considera un número racional, es posible pensarlo representándolo mediante diferentes escrituras y usando la que más les conviene de acuerdo con la situación planteada. Por ejemplo, como el siguiente caso:

$2,5 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,50 = 2,5000 = 10 : 4$

EN LA CARPETA

III. Busquen escrituras equivalentes para los siguientes números racionales: **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** 12:5 **c)** 0,5.

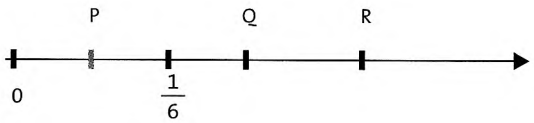
IV. Expliquen en qué casos emplearían cada forma de escritura.

b. Expliquen cómo hicieron en **a.** para encontrar las fracciones.

17 Escriban el número racional que representa cada uno de los puntos: P, Q y R.

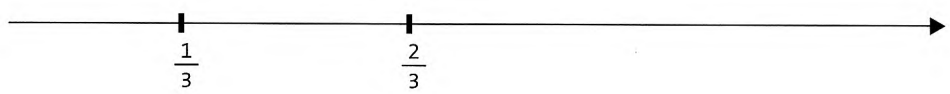
a.

b.

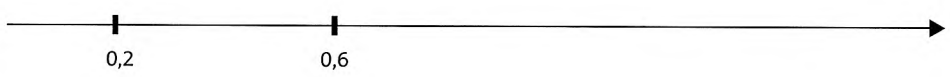


18 Ubiquen el 0 y el 1 en cada una de las siguientes rectas numéricas:

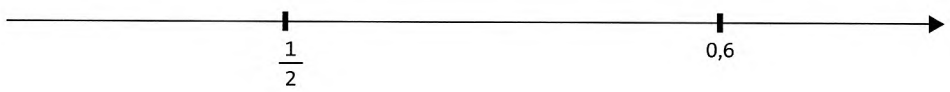
a.



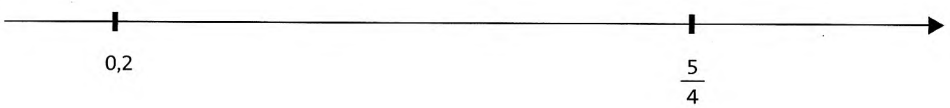
b.



c.



d.



En la página 166 del Anexo teórico, lean el apartado "Recta numérica".

19 Corrijan los problemas **17** y **18** teniendo en cuenta la distancia entre los números marcados.

PROPIEDADES Y RELACIONES

Para comparar precios, medidas y también relaciones entre cantidades, muchas veces es necesario utilizar estrategias de comparación de números racionales.

20 Para ajustar tuercas y pernos, los mecánicos de automóviles utilizan llaves cuyas medidas vienen expresadas en pulgadas, unidad que se simboliza así:".

El mecánico del barrio tiene un juego compuesto por llaves de las siguientes medidas:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$ y 1.

¿QUÉ LLAVE UTILIZARÁ PARA AJUSTAR LA TUERCA MÁS CHICA?

¿Y PARA LA MÁS GRANDE?

21 El mecánico le dijo a Ramiro que, si el motor de su auto funciona bien, no puede gastar más de 12 litros cada 100 km, cuando circula en la ciudad. Ramiro cargó 39 litros y observó que, andando en la ciudad, recorrió 300 km con esa cantidad de nafta. ¿Funciona bien el auto de Ramiro? ¿Por qué?

SÍ	NO

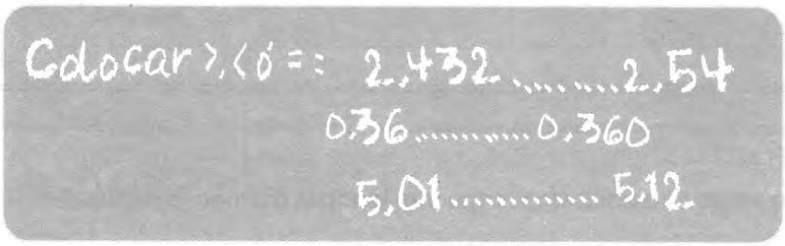
EN LA CARPETA

V. Si el segmento I——I mide $\frac{2}{3}$ de la unidad, dibujen segmentos con las siguientes medidas:

a) 2 unidades.

b) $\frac{1}{2}$ de la unidad.

22 **a.** Resuelvan lo que se plantea en el pizarrón dibujado a continuación:



b. Nicolás dice que 2,432 es mayor que 2,54 porque los dos números tienen un 2 antes de la coma y 432 es mayor que 54. ¿Están de acuerdo con lo que dice Nicolás? ¿Por qué?

SÍ	NO

Lean, en la página 170 del Anexo teórico, el apartado "Orden".

23 Comenten con un compañero si alguna de las estrategias de comparación de fracciones y de decimales que se proponen son más convenientes que las que utilizaron para resolver los problemas **20**, **21** y **22**. Expliquen en una hoja por qué.

24 **a.** Escriban fracciones comprendidas entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$ con denominador 5 y con denominador 10. ¿Cuántas hay en cada caso?

CON DENOMINADOR 5

CON DENOMINADOR 10

b. Si las fracciones están comprendidas entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$, ¿cuántas con denominador 5 y cuántas con denominador 10 hay?

CON DENOMINADOR 5

CON DENOMINADOR 10

c. Escriban fracciones comprendidas entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ con cualquier denominador.
¿Qué sucede en este caso?

25 **a.** Intercalen cinco números decimales entre los siguientes números:

▪ 1 y 2.					
▪ 1,083 y 1,1.					
▪ 2,21 y 2,211.					

b. Expliquen cómo procedieron en cada caso.

Lean el apartado "Densidad", en la página 171 del Anexo teórico, para resolver el problema **26**.

26 **a.** Ramiro dice que el siguiente de 0,235 es 0,236. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

SÍ	NO

b. ¿Se puede determinar el siguiente de un número racional cualquiera? Expliquen por qué.

SÍ	NO

EN LA CARPETA

VI. ¿Cuántos números decimales hay entre 3,4 y 3,5 con:
a) 2 cifras decimales?
b) Tres cifras decimales?
c) Cualquier cantidad de cifras decimales?

OPERACIONES Y PROPIEDADES

Si bien la suma, la resta, la multiplicación y la división de números racionales son operaciones muy conocidas, es importante tener presentes las relaciones y propiedades de esas operaciones porque pueden facilitar algunos cálculos.

27 **a.** Propongan sumas de números racionales que den como resultado*:

	$= \frac{7}{4}$
	= 2,35
	= 0,72

b. Propongan restas de números racionales que den como resultado los mismos números que figuran en el ítem **a.**

- $\frac{7}{4}$ _____
- 2,35 _____
- 0,72 _____

c. Comparen con un compañero si propusieron las mismas cuentas e indiquen cuántas cuentas pueden plantearse en cada uno de los casos.

_____

_____

* **Claves para controlar**

Para controlar el resultado de sumas y restas con fracciones y expresiones decimales, conviene hacer una estimación. Una forma es considerar, por ejemplo, para $\frac{8}{7} + \frac{12}{5}$, el natural más próximo al número, por lo que el resultado será un poco mayor que 1 + 2 = 3. Otra forma es considerar, por ejemplo, en 2,863 + 0,138, una expresión con racionales cuyo resultado se conozca; en este caso, 2,75 + 0,25.

Lean el apartado "Suma y resta de números racionales positivos", en la página 172 del Anexo teórico, para resolver el problema **28**.

28 **a.** Completen las siguientes operaciones e indiquen qué cuenta hicieron en cada caso:

■ $\frac{7}{4}$ − = $\frac{1}{4}$	
■ 2,38 + = 2,49	
■ + $\frac{5}{6}$ = $\frac{9}{5}$	
■ 1,02 − = 0,25	
■ 1 − = $\frac{1}{7}$	
■ 3,25 − (1,15 +) = 1	

b. ¿En algún caso, pudieron completar haciendo un cálculo mental? Si es así, ¿en cuál o en cuáles? Comenten con sus compañeros cómo lo hicieron.

SÍ	NO

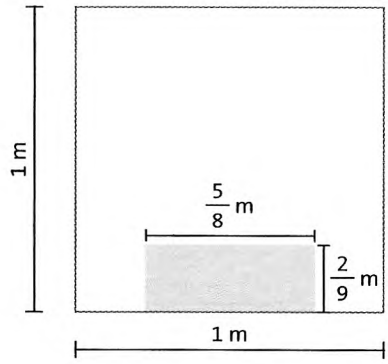
29 Se compraron 7 botellas de gaseosa de $2\frac{1}{4}$ litros, ¿cuántos litros se compraron en total?

	RESPUESTA:

EN LA CARPETA

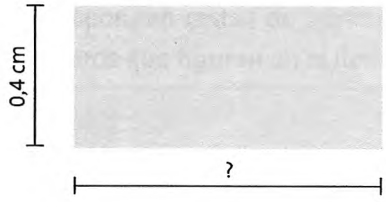
VII. Si las botellas del problema 29 fueran de $1\frac{1}{2}$ litros , ¿cuántas se deberían comprar para tener por lo menos la misma cantidad de gaseosa?

30 ¿Que fracción de m² se sombreó en este dibujo? Controlen el resultado*.



RESPUESTA:

31 Si el área de este rectángulo es 0,28 cm², ¿cuánto mide el largo?



RESPUESTA:

32 **a.** ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de un rectángulo si su área es de 5 m²?

b. Comparen con sus compañeros las dimensiones que propusieron y cómo las obtuvieron.

* **Otras claves para controlar**

Para controlar el resultado de multiplicaciones y divisiones con fracciones, conviene hacer estimaciones. Una forma es considerar uno de los factores o el dividendo y el divisor como un número natural. Por ejemplo, $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$ *es un poco menos que* $\frac{3}{4}$ *porque* $\frac{8}{9}$ *es menor que 1. También se puede transformar la expresión en otra de resultado conocido. Por ejemplo,* $\frac{3}{4} \times \frac{20}{9} > \frac{6}{4}$ *porque* $\frac{20}{9} > 2$.

Lean, en la página 172 del Anexo teórico, el apartado "Multiplicación y división de números racionales positivos".

33 Usen las reglas para resolver los siguientes cálculos:

a. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} =$	**c.** 0,20 x 1,35 =
b. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$	**d.** 2,80 : 1,4 =

34 Una placa de aglomerado mide 151,8 cm de largo y 242,4 cm de ancho.

a. ¿Cómo se puede cortar la placa para hacer estantes de 23,4 cm de ancho por 75,2 cm de largo y desperdiciar la menor cantidad de madera posible?

b. Controlen el resultado* y expliquen cómo pensaron la respuesta al ítem **a**.

35 Consideren el siguiente problema y luego contesten las consignas.

Una empresa de mantenimiento de canchas de fútbol tiene 4 máquinas de cortar el césped. El encargado de la empresa necesita tener listas 5 canchas en menos de una hora. Cada cancha ocupa un cuarto de hectárea y las máquinas tienen diferentes rendimientos. Éstas son las características de las máquinas:

Máquina A	Máquina B	Máquina C	Máquina D
Corta 0,8 ha en 2 h	Corta $\frac{1}{5}$ ha en 4 h	Corta $\frac{1}{5}$ ha en 20 min	Corta $\frac{3}{5}$ ha en 15 min

* **Más claves para controlar**

Para controlar el resultado de multiplicaciones y divisiones con expresiones decimales, conviene hacer estimaciones. Una forma es considerando uno de los factores o el dividendo y el divisor como un número natural, o transformando la expresión y comparándola con una de resultado conocido. Por ejemplo, 45,78 : 3,126 está cerca de 45 : 3 y 16,4589 x 0,672 es un poco más que 16 x 0, 5 = 8.

EN LA CARPETA

VIII. Controlen la resolución del siguiente cálculo y expliquen la clave empleada.

378,86 : 99,7 = 3,8

El ayudante, que estudió en el Japón, pensó en hacer una tabla donde se viera cuánto cortaba cada máquina por hora, para que fuera más fácil calcular en ésta y en otras ocasiones. El ayudante hace los cálculos de un modo particular. Los cálculos que realizó son los siguientes:

A	B	C	D
$\frac{8}{10}$ *ha en* $2\ h$	$\frac{1}{5}$ *ha en* $4\ h$	$\frac{1}{5}$ *ha en* $\frac{1}{3}\ h$	$\frac{3}{5}$ *ha en* $\frac{1}{4}\ h$
$\frac{\frac{8}{10}\ ha}{2\ h}$	$\frac{\frac{1}{5}\ ha}{4\ h}$	$\frac{\frac{1}{5}\ ha}{\frac{1}{3}\ h}$	$\frac{\frac{3}{5}\ ha}{\frac{1}{4}\ h}$
$\frac{\frac{8}{10} \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2}}$	$\frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}}{4 \times \frac{1}{4}}$	$\frac{\frac{1}{5} \times 3}{\frac{1}{3} \times 3}$	$\frac{\frac{3}{5} \times 4}{\frac{1}{4} \times 4}$
$\frac{8}{10} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} \times 3$	$\frac{3}{5} \times 4$
$\frac{8}{20}\ \frac{ha}{h}$	$\frac{1}{20}\ \frac{ha}{h}$	$\frac{3}{5}\ \frac{ha}{h}$	$\frac{12}{5}\ \frac{ha}{h}$

Ésta es la tabla que el ayudante le entregó al encargado:

A	$\frac{8}{20}\ \frac{ha}{h}$	**B**	$\frac{1}{20}\ \frac{ha}{h}$	**C**	$\frac{12}{20}\ \frac{ha}{h}$	**D**	$\frac{48}{20}\ \frac{ha}{h}$

a. ¿Piensan que el encargado pudo cumplir con el trabajo?

b. ¿Por qué creen que el ayudante usó denominador 20 en la tabla?

c. ¿Cómo le explicarían a un compañero cuál es el método que usa el ayudante para dividir fracciones?

Si lo necesitan, lean el apartado "Nuevas propiedades", en la página 176 del Anexo teórico, para responder a la pregunta del ítem **d**.

d. ¿Qué propiedad permite asegurar que este método es correcto? Si se usa esa propiedad, ¿por qué se puede resolver el problema haciendo menos cuentas?

36 **a.** ¿Por qué número se puede multiplicar 6 para que dé por resultado 5?
b. ¿Y para que dé por resultado $\frac{4}{7}$?

a. **b.**

c. ¿Hay más de un número? ¿Por qué?

SÍ	NO

37 **a.** ¿Por qué número se puede multiplicar $\frac{4}{5}$ para obtener un número menor?
b. ¿Y uno más grande?

a. **b.**

EN LA CARPETA

IX. Planteen un problema que se resuelva a través del reparto proporcional. Comprueben con un compañero que el planteo sea correcto.

c. ¿Y por qué número se puede dividir $\frac{4}{5}$ para obtener un número más chico?

d. ¿Y uno más grande?

c. **d.**

38 **a.** Sin hacer las cuentas, completen con <, > ó = según corresponda.

▪ 0,71 x 2,12 ____ 0, 71	▪ $0{,}58 : \frac{1}{3}$ ____ 0,58
▪ 0,71 x 2,12 ____ 2, 12	▪ $\frac{9}{5} : \frac{1}{2}$ ____ $\frac{12}{5} : \frac{1}{2} - \frac{3}{5} : \frac{1}{2}$
▪ $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ ____ $\frac{3}{4}$	▪ $\frac{5}{6}$ ____ $\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$

b. Seleccionen tres expresiones de las presentadas en el ítem **a.** y expliquen cómo pensaron en cada caso.

39 Celeste dice que los dos últimos puntos de **a.** del problema **38** se pueden resolver utilizando las propiedades de las operaciones. ¿Qué propiedades son?

40 Celeste también dice que para hacer la cuenta 3,48 : 0,25 es más fácil multiplicar 3,48 por 4. ¿Está bien? ¿Por qué?

SÍ	NO

1 | EJERCITACIÓN

41 **a.** Sin hacer la cuenta y sin usar calculadora, indiquen por qué potencia de 10 hay que multiplicar o dividir el número 678,975 para obtener lo siguiente:

- Un 8 en el lugar de las decenas.
- Un 5 en el lugar de los décimos.
- Un 9 en el lugar de los milésimos.
- Un seis en el lugar de las unidades.

b. Expliquen cómo lo pensaron.

42 Propongan multiplicaciones diferentes que den por resultado 7; 15,01; $\frac{5}{6}$; 0,125; $\frac{4}{7}$.

43 Para hacer $\frac{3}{5} : \frac{4}{9}$ con la calculadora, Pedro marcó 3 : 5 : 4 : 9. Como le dio distinto que a los chicos, pensó que su calculadora andaba mal.

a. ¿Realmente andaba mal la calculadora? ¿Por qué?

b. Si la calculadora funcionaba bien, ¿qué cuenta hizo Pablo efectivamente?

c. ¿Cómo harían la división planteada con calculadora?

44 **a.** Sabiendo que 34 x 54,25 = 1844,5, sin utilizar calculadora ni hacer cuentas, escriban el resultado de lo siguiente:

- 34 x 542,5 = ☐
- 1,34 x 54,25 = ☐
- 13,4 x 5,425 = ☐

b. Expliquen sus respuestas y propongan otras dos multiplicaciones que se puedan hacer a partir el primer resultado.

45 Sabiendo que $\frac{45 \text{ x } 96}{12 \text{ x } 24} = 15$, indiquen cuál de los siguientes resultados corresponde al cálculo $\frac{4{,}5 \text{ x } 0{,}96}{0{,}12 \text{ x } 0{,}24}$ y expliquen por qué.

a. 0,015 **b.** 15 **c.** 1,5 **d.** 0,15

46 **a.** Propongan cuentas de dividir que den por resultado $\frac{3}{7}$, otras que den 2 y otras que den 0,9.

b. ¿Cuántas hay? ¿Por qué?

47 Ordenen las siguientes fracciones, siendo b, p y r números naturales.

a. $\frac{1}{b}, \frac{7}{b}, \frac{2}{b}, \frac{4}{b}$ y $\frac{3}{b}$.

b. $\frac{p+3}{p}$, $p+1$, $\frac{p}{p}$, $\frac{p+2}{p}$ y $\frac{p+4}{p}$.

c. $\frac{p}{r}, \frac{p+1}{r}, \frac{p-1}{r}, \frac{p-2}{r}$ y $\frac{p+2}{r}$, con $p > 2$.

48 Completen con números naturales lo siguiente:

a. $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{20}$ **b.** $\frac{\square}{7} = \frac{5}{\square}$

2 | MÁS PROBLEMAS

49 Representen en una misma recta numérica los siguientes números racionales y expliquen cómo la eligieron: 0,1; $\frac{1}{2}$; 0,25; $\frac{2}{3}$; 0,5 y $\frac{3}{4}$.

50 **a.** Dadas las siguientes igualdades, formen pares de fracciones equivalentes entre sí.

■ $3 \times 4 = 2 \times 6$ ■ $4 \times 5 = 2 \times 10$ ■ $6 \times 6 = 3 \times 12$

b. ¿Cuántos pares diferentes pudieron formar? ¿Por qué?

51 Propongan ejemplos de números racionales entre los que se puedan intercalar:

a. Sólo dos fracciones de denominador 4.

b. Sólo dos fracciones de denominador 10.

c. Sólo cuatro decimales de tres cifras decimales.

52 Reconstruye la unidad en cada caso:

a. Este dibujo representa $\frac{2}{5}$ de la unidad.

Este dibujo representa $\frac{7}{4}$ de la unidad.

3 | PROBLEMAS PARA REPASAR

53 Expresen, en grados, la medida de los siguientes ángulos: Por ejemplo, $34^\circ\ 30' = 34{,}5^\circ$ pues $30' = \frac{30}{60}$

a. $42^\circ\ 15'$

b. $54^\circ\ 22'$

c. $0^\circ\ 45'$

d. $93^\circ\ 6'\ 44{,}2''$

54 En la pantalla de una calculadora científica, aparecen las siguientes medidas de ángulos, expresadas en grados:

■ $35{,}2^\circ$ ■ $79{,}205^\circ$ ■ $45{,}00005^\circ$

Si la calculadora no tiene la tecla que transforma directamente la parte decimal en minutos y segundos, ¿cómo harían, utilizando esa calculadora, para expresar los ángulos en grados, minutos y segundos?

55 **a.** Piensen un número y hallen su triple. Luego, súmenle 6, réstenle el doble del número que pensaron, réstenle 6 y réstenle 10. ¿Qué número obtuvieron?

b. Prueben con otros números. ¿Sucede lo mismo?

c. ¿Cómo pueden explicar este "truco"?

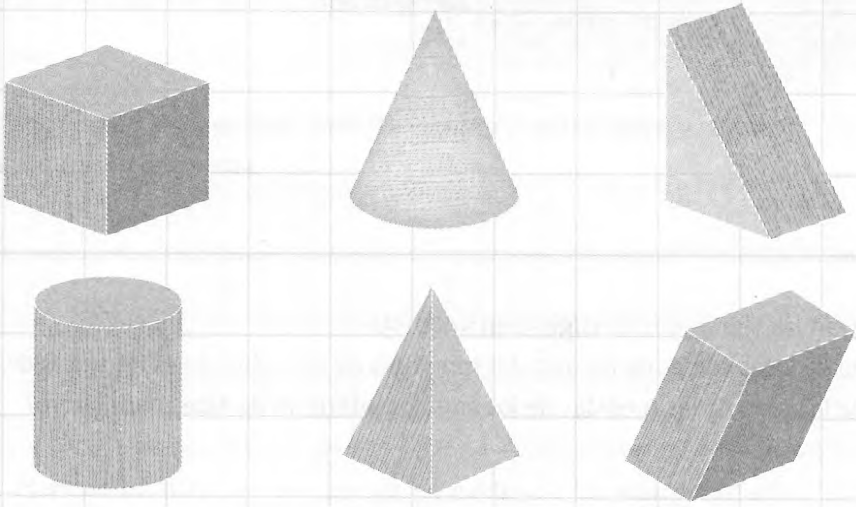
56 Cinco piratas encontraron, en una isla desierta, un tesoro dentro de un cofre. Éste consistía en una cierta cantidad de monedas que resolvieron repartir al día siguiente. Durante la noche, uno de ellos, desconfiando del resto, decidió separar su parte, para lo cual dividió el total en cinco partes y, dando una moneda que sobraba al loro, se fue a dormir.
Enseguida, otro de los hombres se despertó e hizo lo mismo. Dividió lo que había quedado en cinco partes, tomó la suya y le dio la moneda que sobraba al loro. Los tres restantes hicieron lo mismo, dándole siempre al loro la moneda que sobraba.
A la mañana siguiente, repartieron lo que quedaba, dando nuevamente al loro la moneda que sobraba.
Si el número total de monedas era 15.621, ¿cuántas repartieron a la mañana siguiente entre todos?

57 El lenguaje de una computadora se reduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un byte u octeto es una de esas secuencias y está formada por 8 dígitos. Por ejemplo, 01100100. ¿Cuántos bytes diferentes se puede formar?

58 El sistema actual de patentes de automóviles consta de tres letras elegidas entre 26 y tres números elegidos entre 0 y 9. ¿Cuántas patentes distintas se pueden otorgar? ¿Qué ventajas tiene con respecto al patentamiento con siete números?

T. P. 4 | Figuras en el espacio y en el plano

1 Éstos son dibujos de cuerpos de madera:



a. Con un compañero, realicen lo siguiente: uno elige un cuerpo y el otro intenta descubrir el cuerpo elegido haciendo preguntas que su compañero pueda responder por sí o por no. En las preguntas, no se puede usar el nombre del cuerpo.

b. Un grupo eligió dos de los cuerpos e indicó estas semejanzas y diferencias:

EN LA CARPETA

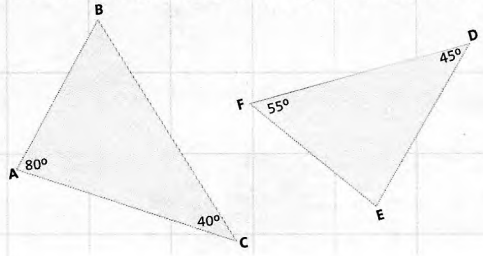
I. Elijan tres de los cuerpos dibujados en el ejercicio 1 y elaboren para cada uno preguntas que permitan identificarlo.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4 REVISIÓN

CARACTERÍSTICAS COMUNES	CARACTERÍSTICAS DIFERENTES
■ Tienen más de una cara plana. ■ Tienen por lo menos un par de caras paralelas.	■ Uno de los cuerpos tiene todas sus caras con forma de polígonos congruentes.

¿De qué cuerpos se trata? Expliquen sus conclusiones.

2 A continuación, se representan dos triángulos escalenos.

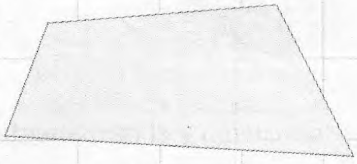


En el segundo triángulo, ¿alguno de los ángulos mide igual que $\hat{A}$? ¿Cómo lo averiguaron?

SÍ	NO

3 Resuelvan las siguientes consignas en una hoja:

a. Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, ¿cuánto vale la suma de las medidas de los ángulos interiores de este cuadrilátero?

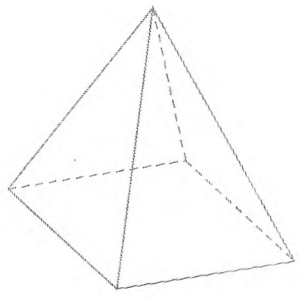


b. Lo averiguado ¿es válido para cualquier cuadrilátero? ¿Por qué?

CUERPOS

Los cuerpos geométricos, por tener tres dimensiones, se consideran figuras en el espacio. La forma y las relaciones entre sus caras, la manera de representarlos en el plano y su construcción permiten resolver distintos problemas.

4 En el problema **1**, estuvieron descubriendo cuerpos. No se permitía usar el nombre del cuerpo. Julio eligió el siguiente y envió mensajes a distintos compañeros:



JUAN	■ No tiene todas las caras iguales. ■ Tiene todas las caras planas. ■ Tiene algunas caras triangulares.
VIVI	■ Tiene caras triangulares y cuadradas. ■ No tiene caras paralelas.
MALU	■ Tiene caras triangulares y rectangulares. ■ Las caras triangulares se juntan en un vértice.

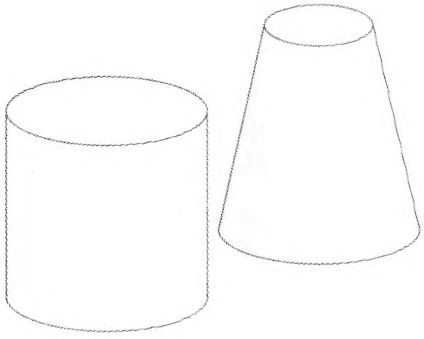
a. ¿Alguno de los mensajes permite identificar este cuerpo y no otro? Expliquen su respuesta.

b. Escriban un mensaje que ponga en evidencia las relaciones entre las distintas caras del cuerpo.

EN LA CARPETA

11. Intenten dibujar un cuerpo, diferente al que se observa en el problema número 4, que cumpla con la descripción que envió Juan en el mensaje.

5 Observen los siguientes cuerpos. Escriban las características comunes y las diferencias entre ambos.



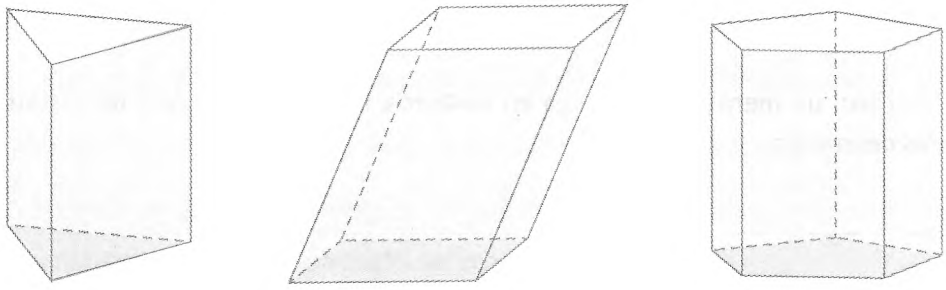
CARACTERÍSTICAS COMUNES
DIFERENCIAS

6 En una hoja, construyan una pirámide de base cuadrada y luego resuelvan las consignas.

a. Dibujen sobre un papel cada una de sus caras siguiendo los bordes. ¿Cuántas figuras planas obtienen? ¿Cuáles son? Entre ellas, ¿hay congruentes?

b. ¿Cuántos trozos de alambre o cuántas varillas deben tener para armar la estructura de una pirámide de base cuadrada? ¿Habrá trozos de igual longitud? Si utilizan bolitas de plastilina para mantener la estructura, ¿con cuántas deben contar?

7 Observen los siguientes prismas y resuelvan las consignas:



a. De acuerdo con estos ejemplos, ¿cómo definirían un prisma?

b. ¿Cómo varía el número de caras entre ellos? ¿Y el de vértices?

c. Marquen en los dibujos la altura de cada uno de ellos. ¿Cómo la definirían?

Para completar la tabla, pueden recurrir al apartado "Descripción de un cuerpo geométrico", que comienza en la página 181 del Anexo teórico.

8 El matemático alemán Euler enunció que para todos los poliedros sin agujeros se verifica que "nro. de caras – nro. de aristas + nro. de vértices = 2". Completen la tabla con los cuerpos del problema anterior y comprueben si se cumple la relación mencionada.

CARACTERÍSTICAS / CUERPOS	NRO. DE CARAS	NRO. DE VÉRTICES	NRO. DE ARISTAS	¿CUMPLE LA RELACIÓN DE EULER?

ARMANDO Y DESARMANDO CUERPOS

Una de las representaciones planas de un cuerpo es su desarrollo. Éste pone en relación algunos de los elementos de un cuerpo y permite resolver distintos problemas.

9 Consideren que el aula tiene la forma de un prisma, tomando las paredes, el techo y el piso como las caras o planos. Resuelvan las consignas en una hoja:

a. Dibujen un esquema del aula, indiquen las caras paralelas y expliquen por qué piensan que se cumple dicha relación.

b. ¿Hay caras perpendiculares entre sí? ¿Cuáles?

c. Representen con hojas de papel dos caras que no sean paralelas ni perpendiculares.

EN LA CARPETA

III. Elijan uno de los prismas del ejercicio 7 y dibujen su desarrollo. Luego recórtenlo para armarlo. Con un compañero, analicen los aciertos y los errores del dibujo inicial.

10 Consigan una caja pequeña, que puede ser de un medicamento. Con cuidado, desármenla y quiten las aletas que sirven para pegar caras vecinas.

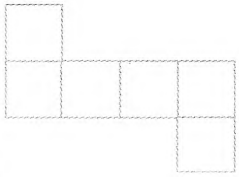
a. ¿Qué obtuvieron?

b. ¿Hay caras congruentes? ¿Y aristas congruentes? ¿Cómo lo averiguaron?

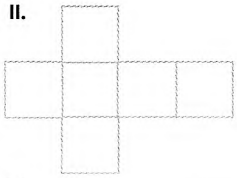
11 Al "desarmar" un cubo, obtenemos lo que en Geometría se conoce como su desarrollo.

a. ¿Con cuál de los siguientes desarrollos es posible construir un cubo?

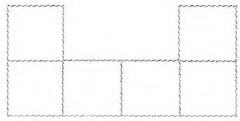
I.



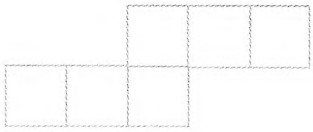
II.



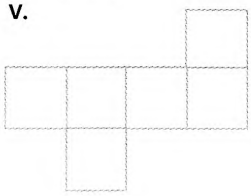
III.



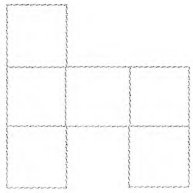
IV.



V.



VI.



b. Diseñen en una hoja dos desarrollos diferentes a los ya representados y que permitan construir cubos.

12 Deben construir un cubo cuya arista mida 4 cm. ¿Cómo lo harían? Escriban en una hoja las instrucciones para que pueda construirlo cualquier persona que lo desee.

13 ¿Es posible construir una pirámide de base cuadrada a partir de alguno de los siguientes procedimientos? ¿Por qué?

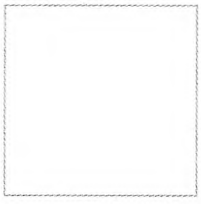
PROCEDIMIENTO 1

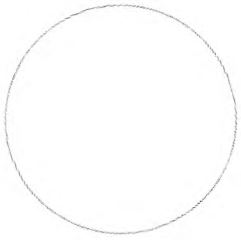
I.	Dibujar un cuadrado de 2 cm de lado.
II.	Sobre uno de los lados del cuadrado, dibujar un triángulo isósceles cuya base sea el lado del cuadrado y los lados midan 3 cm.
III.	Dibujar otro triángulo isósceles congruente con el anterior, de manera que los dos triángulos se toquen en un solo punto y sus bases sean paralelas.
IV.	Repetir los pasos **II.** y **III.** sobre un lado del cuadrado que no sea el elegido en **II.**
V.	Recortar la figura por su contorno y plegarla.

PROCEDIMIENTO 2

I.	Dibujar un cuadrado de 2 cm de lado.
II.	Sobre cada uno de los lados del cuadrado, dibujar un triángulo isósceles cuya base sea el lado del cuadrado y los lados midan 3 cm. Estos dos lados no se cortan con los lados del cuadrado.
III.	Recortar el dibujo por su contorno y plegarlo por los lados del cuadrado.

14 Si se repite una o más de estas figuras la cantidad de veces que sea necesario, ¿es posible construir* un cilindro? Expliquen sus respuestas en una hoja aparte.





* **Construcciones y definiciones geométricas**

En Geometría, cuando se explica el procedimiento para construir una forma, se usa lo que se sabe de ella y sus propiedades. Si las caras son paralelas o no, si son congruentes y a qué tipo de figura plana corresponden son pistas para definir la forma con la que se está trabajando.

EN LA CARPETA

IV. Escriban las conclusiones del ejercicio número 13.

V. Redacten una nueva consigna que permita la construcción de la pirámide de base cuadrada.

15 ¿Es posible armar un prisma con dos rectángulos de 7 cm por 3 cm, dos de 5 cm por 3 cm y dos de 7 cm por 5 cm? Explique su respuesta.

SÍ	NO

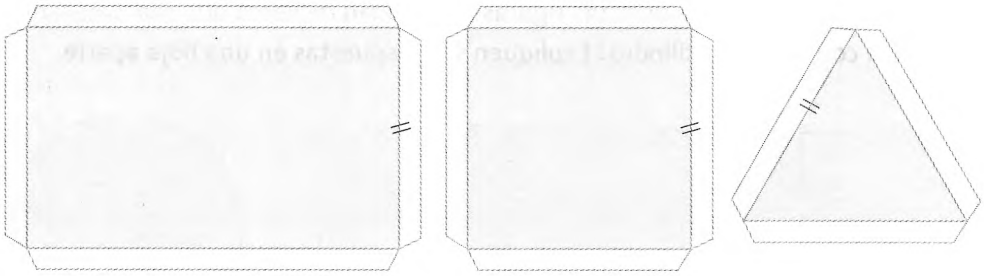
16 Disponen de dos rectángulos de 10 cm por 7 cm y dos de 8 cm por 7 cm.

a. ¿Qué medidas deben tener los otros dos rectángulos para poder construir un prisma?

RECTÁNGULO 1		RECTÁNGULO 2	

b. En una hoja, dibujen el desarrollo del prisma e indiquen sus dimensiones.

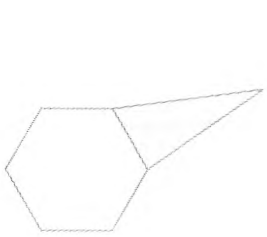
17 **a.** Dibujen y recorten en cartulina las figuras que se dan a continuación. Deben construir la cantidad necesaria de cada una para armar los cuerpos que se piden. Las aletas sirven para doblarlas y pegarlas hacia adentro en el armado de los cuerpos.

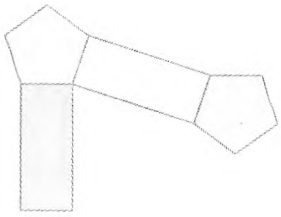


b. Realicen las siguientes consignas:

- Construyan un cuerpo que tenga por lo menos un par de caras paralelas y que no todas ellas sean congruentes.
- Construyan un cuerpo que tenga más de seis caras, todas ellas congruentes.
- Agreguen a las figuras dadas otra que permita construir un prisma oblicuo.

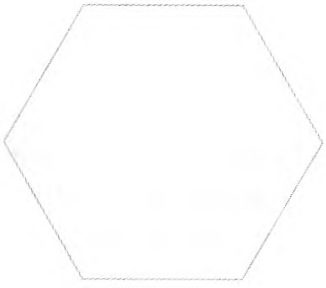
18 A continuación, se presentan desarrollos incompletos de distintos cuerpos. Deben completarlos dibujando las caras que faltan para que puedan armarse los cuerpos.

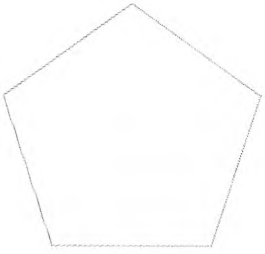




19 Seguramente, nunca se dieron cuenta de que una pelota de fútbol está formada por polígonos.

a. Con paciencia, cartulina y cinta adhesiva, armen una pequeña pelota usando como molde las figuras planas que están a continuación.





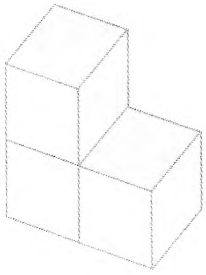
b. Copien los moldes en la cartulina. Para eso, calculen cuántos deben hacer de cada uno de ellos y, una vez armada la pelota, realicen en una hoja distintas representaciones planas.

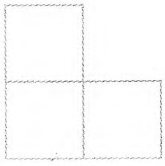
c. Marquen un punto sobre la pelota y luego indíquenlo en cada una de las representaciones que hicieron en el ítem **b.**

EN LA CARPETA

VI. Piensen si pueden construir otros cuerpos con los moldes del ejercicio número 19 y dibujen la representación de los cuerpos que imaginaron.

20 El siguiente cuerpo está formado por tres cubos de 1 cm de arista. Según cómo se mire, se pueden construir diferentes representaciones de las que están dibujadas.

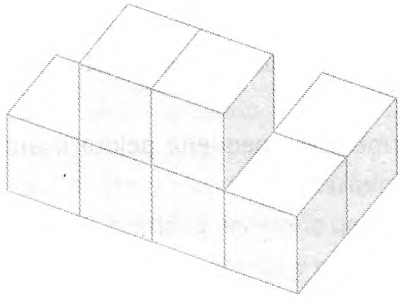




VISTA FRONTAL

VISTA LATERAL

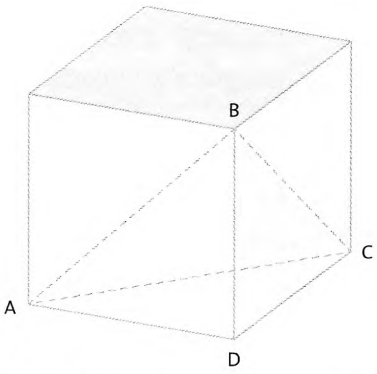
Dibujen en una hoja distintas "vistas" que podrían obtenerse del siguiente cuerpo:



21 Supongan que les entregan los siguientes dibujos y les piden que construyan, para cada uno, un cuerpo que corresponda a esa descripción. ¿De qué cuerpo se trata en cada caso? Para la construcción, pueden utilizar plastilina o cartulina.

	I.	II.	III.
Frente / Vista de arriba			
	I.	II.	III.

22 El cubo dibujado se corta siguiendo las líneas punteadas.



Resuelvan las siguientes consignas en una hoja:

a. Describan qué tipo de cuerpo es el ABCD y qué relación tienen las aristas de la cara ABC. Justifiquen su descripción.
b. Describan el cuerpo que queda al sacar del cubo el cuerpo ABCD. ¿Qué nombre puede llevar?

23 A fin de analizar qué condiciones se tienen que cumplir para construir un poliedro, resuelvan las siguientes consignas y escriban sus conclusiones en una hoja. Si lo necesitan, realicen en cada caso una figura de análisis.

a. ¿Es posible construir un poliedro colocando seis triángulos equiláteros en cada vértice? ¿Y seis triángulos isósceles?
b. ¿Y poniendo cuatro cuadrados en cada vértice?
c. ¿Y reuniendo seis hexágonos regulares en cada vértice?
d. Vuelvan a su respuesta del ítem **a.** Si han cambiado de opinión, modifíquenla.

En las páginas 181 a 184 del Anexo teórico, se desarrolla el apartado "Cuerpos geométricos".

24 Realicen en una hoja aparte un cuadro para clasificar los cuerpos según sus características sobre la base de un criterio que elijan.

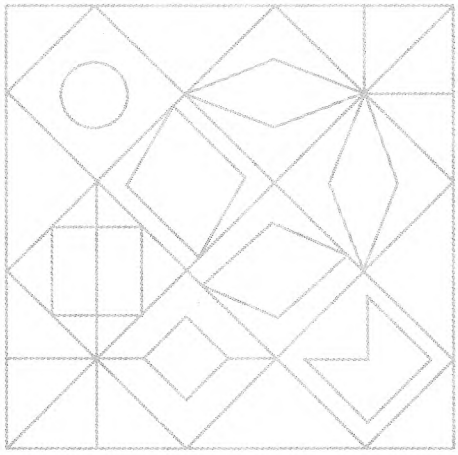
EN LA CARPETA

VII. Realicen el desarrollo del cuerpo resultante al sacar del cubo del ejercicio 22, el cuerpo ABCD.

FIGURAS PLANAS

Entre las superficies en el plano que están limitadas por líneas curvas o rectas, con agujeros o sin ellos, están los polígonos y, en particular, los triángulos y los cuadriláteros. Sus propiedades permiten resolver distintas situaciones.

25 Observen el siguiente esquema, correspondiente a una pintura de Vasarely denominada *El cuadro de Sikra*. Luego resuelvan en una hoja las consignas que aparecen a continuación de él.

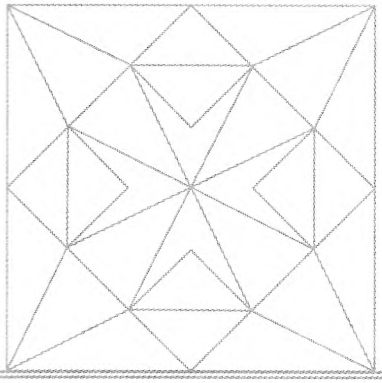


a. Realicen un listado de las formas geométricas diferentes que ven en el esquema. Si alguna de las figuras no tiene un "nombre" particular, pueden inventárselo, pero es importante que todos reconozcan de cuál se trata. Comparen su trabajo con el de otro compañero. De ser necesario, completen sus listas.
b. Clasifiquen las formas en grupos y coloquen un "cartel" a cada grupo.
c. Identifiquen con letras en el esquema las siguientes figuras:

■ Cuadrilátero cóncavo	A	■ Trapecio isósceles	D
■ Pentágono cóncavo	B	■ Pentágono convexo	E
■ Hexágono cóncavo	C	■ Cuadrado agujereado	F

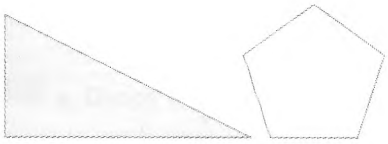
d. ¿Existe una sola figura de cada tipo? ¿Cuántas encontraron?

26 Utilizando regla y compás, reproduzcan la siguiente figura en el cuadrado en blanco. ¿Están seguros de que son iguales? ¿Cómo pueden dar cuenta de que lo son?



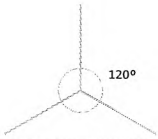
27 **a.** Si se quiere embaldosar un piso con cerámicas cuadradas todas iguales, no se presentan mayores dificultades. ¿Creen que con otras figuras ocurrirá lo mismo? ¿Por qué?

b. Para responder a la pregunta anterior, Ayelén probó con triángulos y Daniel, con pentágonos, respectivamente congruentes con los dibujados a continuación. ¿Piensan que llegaron a la misma conclusión? ¿Por qué? Para responder, pueden dibujar figuras de análisis en sus carpetas.



SÍ	NO

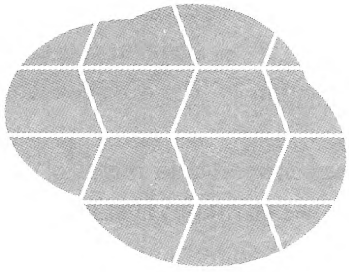
c. Andrés probó con otro polígono y le mostró a Ayelén y a Daniel el dibujo siguiente, mientras explicaba: "Cuando se juntan así, no quedan espacios vacíos". ¿De qué polígono se trata?

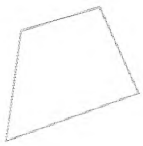


EN LA CARPETA

VIII. Dibujen cómo imaginan que quedó el piso con las cerámicas que propuso Andrés. Comparen con los dibujos de otros compañeros.

28 El siguiente embaldosado está realizado con trapecios.



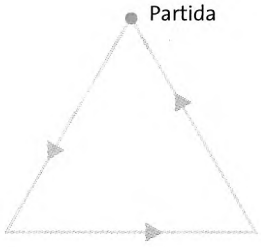


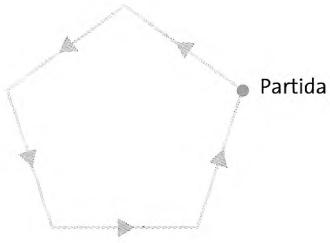
a. ¿Es posible hacer cubrimientos con cada uno de estos cuadriláteros? En caso de que sea posible, realicen los embaldosados en una hoja.

Lean el apartado "Polígonos" en las páginas 185 y 186 del Anexo teórico.

b. Investiguen si es posible cubrir una superficie con cualquier cuadrilátero. Expliquen su respuesta en una hoja y luego comparen lo que escribieron con lo que se dice en el Anexo teórico.

29 Los esquemas muestran distintos recorridos que hace una persona.





a. En una hoja, describan los recorridos que realiza cada persona teniendo en cuenta que los giros son respecto de su cuerpo. Otra pista es que vuelven al punto de partida. Intercambien sus trabajos con otro compañero.

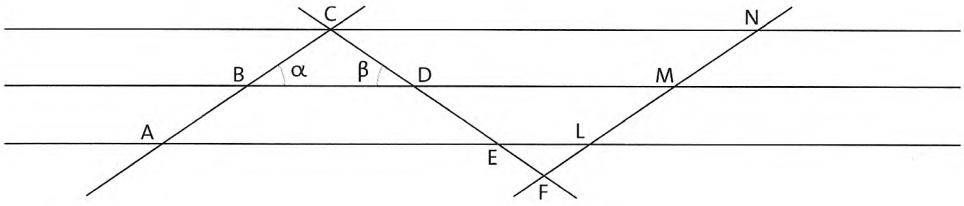
b. En cada caso, ¿cuál es la suma de las medidas de los ángulos que se ha girado?

30 Dibujen en una hoja un esquema de cada uno de los recorridos que se describen a continuación. Consideren el Norte como posición inicial y los ángulos orientados en el sentido de las agujas del reloj.

a. Recorran 20 m en una dirección de 45º, realizar $\frac{1}{4}$ de giro, es decir, 90º, y recorran 50 m.

b. Recorran 10 m en una dirección de 120º, girar y recorran otros 20 m en una dirección de 45º.

31 A partir del siguiente esquema, realicen **a.** y **b.** , sabiendo que AE II BD II CN.



a. Indiquen con un color los ángulos que tienen la misma amplitud que el ángulo α.
b. Indiquen con otro color los ángulos que tienen la misma amplitud que el ángulo β.

TRIÁNGULOS

Tres lados, tres ángulos, tres vértices. Estas características y otras propiedades se ponen en juego cuando se trabaja con triángulos.

32 **a.** Dados los siguientes segmentos, *m* y *n*, construyan en una hoja aparte, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a *m* y otro lado igual a *n*.

m *n*

b. ¿Se pueden construir dos triángulos distintos? ¿Por qué? Compartan sus conclusiones con sus compañeros oralmente.

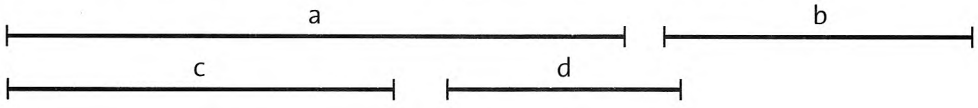
c. Consideren un tercer segmento, *k*, de 6 cm. Construyan en una hoja, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a *m*, otro lado igual a *n* y el tercero igual a *k*. ¿Pueden construir dos distintos? ¿Por qué? Escriban en la misma hoja sus conclusiones.

EN LA CARPETA

IX. Dibujen tres segmentos con los que no se pueda construir un triángulo y expliquen el motivo.

d. Cambien el tercer segmento por otro, *p*, de longitud 7 cm. Si es posible, construyan en una hoja un nuevo triángulo de lados *m*, *n* y *p*.

33 Dados los siguientes segmentos, resuelvan en una hoja **a.** y **b.**



a. Elijan tres cualesquiera y prueben si es posible construir un triángulo con ellos. Escriban sus conclusiones.

b. Seleccionen uno de los triángulos construidos. Escriban un mensaje para ser transmitido por teléfono sobre cómo construir ese triángulo y que contemple que la construcción sea realizada con regla no graduada y compás.

34 Resuelvan las siguientes consignas en una hoja aparte:
a. Consideren los siguientes ángulos α y β:

Construyan, si es posible, un triángulo. ¿Pueden construir dos distintos?

b. ¿Será cierto que, dados dos ángulos, siempre es posible construir un triángulo?

35 **a.** Construyan en una hoja, si es posible, un triángulo cuyos ángulos midan 30º, 45º y 75º. ¿Pueden construir dos triángulos distintos? ¿Por qué?

SÍ NO

b. Construyan* en una hoja aparte, si es posible, un triángulo cuyos ángulos midan 30º, 45º y 105º. ¿Pueden construir dos triángulos distintos? ¿Por qué?

SÍ NO

36 **a.** Un triángulo ¿puede tener más de un ángulo recto? ¿Por qué?

SÍ NO

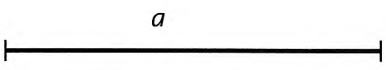
b. En un triángulo rectángulo, ¿cómo son los otros ángulos?

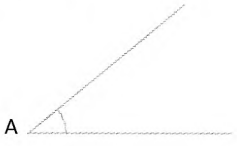
c. Un triángulo ¿puede tener más de un ángulo obtuso? ¿Por qué?

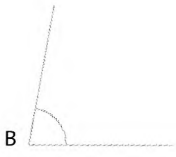
SÍ NO

d. En un triángulo obtusángulo, ¿cómo son los otros ángulos?

37 Consideren el segmento *a* y los ángulos A y B:







a. En una hoja, construyan, si es posible, un triángulo en el cual uno de sus lados sea congruente con el segmento *a* y los ángulos adyacentes (es decir, los que están apoyados en los extremos del segmento) sean congruentes con los ángulos A y B.

* **Construcciones y relaciones**
Tengan presente que las construcciones permiten descubrir algunas relaciones entre los elementos de una figura, pero no sirven como demostración.

EN LA CARPETA

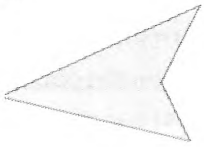
X. A partir de la consigna del ejercicio 37 verifiquen si es posible construir dos triángulos diferentes. Expliquen por qué.

CUADRILÁTEROS

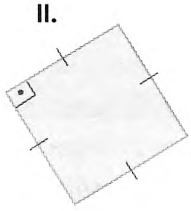
Si bien ya reconocen los elementos de los cuadriláteros, es conveniente tener en cuenta algunas relaciones que hacen de algunos de ellos figuras especiales, como es el caso de los paralelogramos.

38 Elijan uno de los once cuadriláteros siguientes y escriban, en una hoja, todas las preguntas que permiten identificar cuál fue el elegido. Clasifiquen en la misma hoja las preguntas de acuerdo con el tipo de cuadrilátero del cual se trata.
Compartan su trabajo con el de otro compañero.

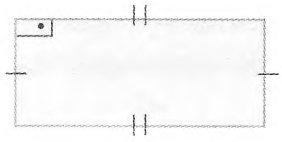
I.



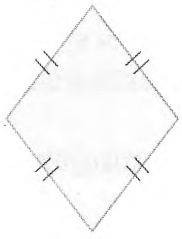
II.



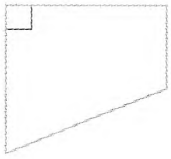
III.



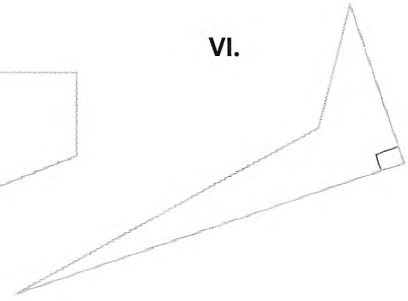
IV.



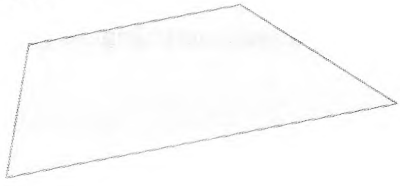
V.



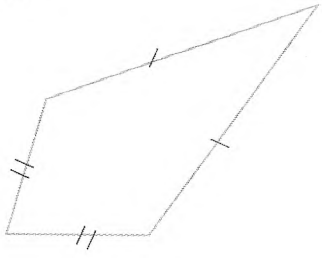
VI.



VII.

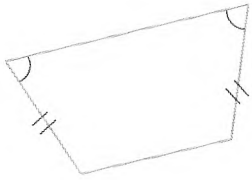


VIII.

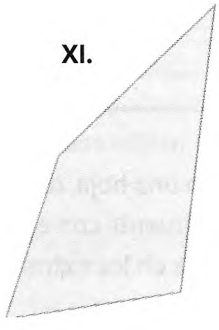


IX.

X.



XI.



LADISLAO, POR FAVOR, PIENSA EN UN CUADRADO Y EN UN RECTÁNGULO.
AHORA, DIME QUÉ TIENEN EN COMÚN Y QUÉ NO.
COINCIDEN EN .... Y SE DISTINGUEN EN ....
PERFECTO. QUIERO QUE PIENSES QUÉ FIGURAS SE OBTIENEN SI, CON LOS MISMOS LADOS, NO SE CUMPLE LA CONDICIÓN DE ÁNGULOS RECTOS.
..... Y .....
EXACTO. ¿Y QUÉ CARACTERÍSTICAS SE MANTIENEN Y CUÁLES NO ENTRE LAS FIGURAS RECTAS Y SUS TRANSFORMACIONES?
SE MANTIENEN .... Y SE ALTERA ....
HASTA AHORA, CONTESTÓ BIEN.
DIME, LADISLAO, ¿ES CORRECTA LA SIGUIENTE AFIRMACIÓN?
"LAS DIAGONALES DE UN CUADRADO SON CONGRUENTES. AL TRANSFORMARLO EN UN ROMBO, LO QUE UNA PIERDE LO GANA LA OTRA; DE TAL MODO, LA SUMA DE AMBAS DIAGONALES SE MANTIENE CONSTANTE."
ES... INCORRECTO, PORQUE ....
CONTESTÓ BIEN, PERO TODAVÍA TENGO DUDAS. DÉMOSLE UNA OPORTUNIDAD MÁS: MÁNDELO A QUE BSBSBSBS.
BUENO, DISPONGÁMONOS AHORA PARA LA PRUEBA DEFINITIVA.
LADISLAO, DEBO ENCARGARLE ALGO DE SUMA IMPORTANCIA: BSBSBSBS...

40 Reúnanse con un grupo de compañeros. Después de discutir entre todos las siguientes afirmaciones, coloquen una cruz en V o en F y expliquen sus respuestas.

a. Todos los cuadrados son rombos.

V F

b. Todos los rombos son cuadrados.

V F

c. Todos los rectángulos son cuadrados.

V F

d. Todos los cuadrados son rectángulos.

V F

e. Todos los rectángulos son paralelogramos.

V F

f. Todos los paralelogramos son rectángulos.

V F

41 Usando sólo lápiz, regla no graduada y compás, ¿es posible construir un paralelogramo que no sea rectángulo a partir de las instrucciones **I.** a **IV.**?

a. Realicen la construcción en una hoja y expliquen sus conclusiones.

I. Dibujen un segmento AB de 5 cm de longitud.
II. Marquen el punto medio del segmento AB, llámenlo P.
III. Dibujen otro segmento, CD, de 3 cm de longitud de tal forma que su punto medio también sea P.
IV. Unan A con C, C con B, B con D y D con A.

b. Escriban en una hoja las instrucciones modificadas para construir un cuadrado.

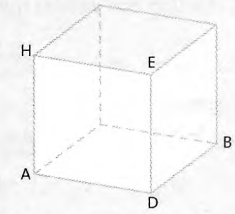
1 | EJERCITACIÓN

42 Completen, para cada cuerpo mencionado en el T. P. Nº 4, una ficha como ésta:

FICHA PARA POLIEDROS
Nombre del poliedro:
Forma de los polígonos de las caras:
Número de caras:
Número de aristas:
Número de vértices:
Número de aristas paralelas:
Número de ángulos diedros rectos:
Número de aristas y número de caras que coinciden en cada vértice:
Otras propiedades:

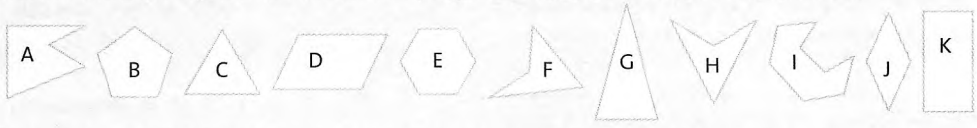
43 A partir de polígonos congruentes de cartulina, construyan poliedros regulares.

44 El cuerpo representado está construido en material transparente.



a. Una de las caras es la ADEH. Nombren, de manera similar, el resto de las caras.
b. Uno de los vértices es A. ¿Cuáles son los otros?
c. El segmento $A\overline{H}$ es una de las aristas. ¿Es el segmento EB una arista? ¿Cuáles son las otras aristas?

45 A continuación, se representan una serie de polígonos, cada uno identificado con una letra.



Se decidió clasificarlos de diferentes formas. Reconozcan la característica de cada agrupamiento.

a. A, B. **b.** A, H, I, F. **c.** B, C, E.
d. D, F, H, J, K. **e.** D, E, K, J. **f.** A, B, C, E, G, I.

2 | MÁS PROBLEMAS

46 ¿Pueden construir poliedros no regulares usando sólo polígonos regulares? Describan los que hayan encontrado. Expliquen sus conclusiones.

47 El siguiente procedimiento se utilizó para construir dos rectas perpendiculares, usando regla no graduada y compás, y sin usar escuadra.

I. Tomar dos puntos, A y B, y trazar la recta AB.
II. Hacer centro en A y dibujar una circunferencia con el compás.
III. Con la misma abertura del compás, dibujar otra circunferencia con centro en B.
IV. Nombrar C y D a los puntos en que se cortan ambas circunferencias.
V. Uniendo C con D, y considerando B, se obtienen rectas perpendiculares.

a. Realicen la construcción de acuerdo con el procedimiento descripto.
b. ¿Siempre se llega a la construcción pedida? ¿Por qué? De ser necesario, modifiquen alguna de las consignas.
c. Intercambien sus trabajos con los de otro compañero y compartan las conclusiones.

48 Si extienden hacia ambos lados los segmentos que corresponden a las aristas de un prisma, obtienen rectas. Indiquen si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones y expliquen sus respuestas. En el caso de que alguna sea falsa, agreguen alguna condición para transformarla en verdadera.

a. Dos rectas que no se cortan son paralelas.

b. Si una recta A es paralela a otra B, y B es paralela a C, entonces, A es paralela a C.

49 **a.** ¿Qué procedimiento se les ocurre para trazar dos rectas paralelas, utilizando sólo lápiz, regla y compás, sin usar escuadra?

b. Escriban todas las instrucciones necesarias para que otro pueda realizar la construcción.

50 Reflexionen sobre las relaciones que cumplen las diagonales de los cuadriláteros.

a. ¿En qué cuadriláteros las diagonales:

- son iguales?
- son perpendiculares?
- se cortan en sus puntos medios?

b. ¿Existe algún cuadrilátero que no cumpla ninguna de las condiciones anteriores? ¿Cuál?

c. ¿Existe alguno en que se cumpla más de una de las condiciones? ¿Cuál?

3 | PROBLEMAS PARA REPASAR

51 Imaginen que deben armar un cuerpo de la forma de una caja de zapatos. Para hacerlo, cuentan con varillas que pueden unir con bolitas de plastilina.

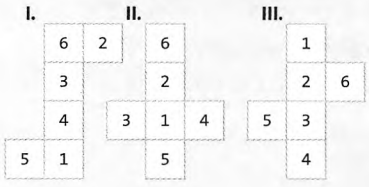
a. ¿Con cuántas varillas deben contar para poder armar el esqueleto de la caja?

b. ¿Cuántas bolitas de plastilina necesitan si se trata de una caja cuya base es un pentágono?

c. Respondan a las preguntas del problema considerando un cuerpo con forma de una pirámide de base rectangular.

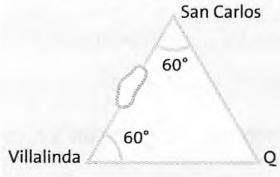
d. Construyan alguno de los cuerpos anteriores con los materiales mencionados.

52 En los dados que se usan para jugar, el 1 y el 6 están en caras paralelas, igual que el 2 y el 5, y que el 3 y el 4. Sin realizar construcciones, contesten con cuál de los siguientes desarrollos se cumplen esas condiciones.



53 Entre las ciudades de San Carlos y Villalinda, hay una laguna, lo que hace difícil medir la distancia entre ellas. Para resolver este problema, se decide trazar dos ángulos de 60º, como se muestra en el esquema, cuyos lados se cortan en Q.

Expliquen por qué la distancia entre las ciudades es igual a la distancia de una de ellas a Q.



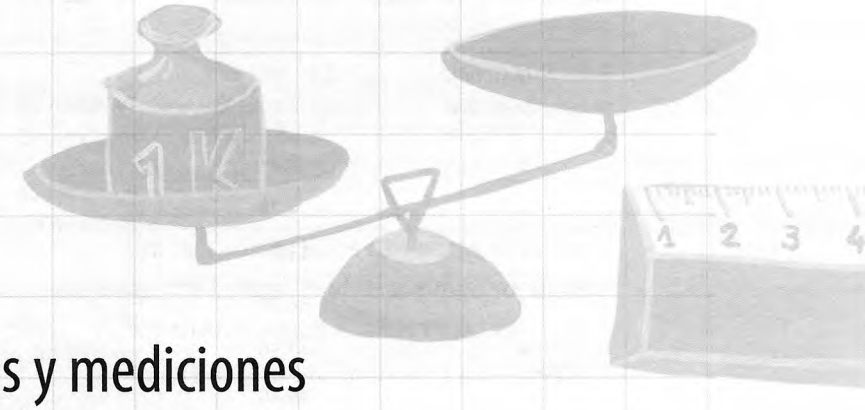
54 Se propone un verdadero desafío trabajando con cuadriláteros.

a. Construyan varios cuadriláteros distintos entre sí.

b. Marquen en cada uno los puntos medios de sus lados.

c. ¿Qué cuadrilátero se forma uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera?

d. Saquen las primeras conclusiones y prueben con algún cuadrilátero cóncavo. ¿Llegan a los mismos resultados? ¿Por qué?



T. P. 5 | Medidas y mediciones

1 En diferentes ramas de la ciencia, según las situaciones, se utilizan distintas unidades de medida.
Analicen la información siguiente y, para cada uno de los cuatro ejemplos, anoten en una hoja qué números pueden asociar a los resultados de una medición. Si es posible, indiquen cuál piensan que es la fuente de información.

PACIENTE: ÁLVAREZ, ANASTASIA
FECHA DE EMISIÓN: 19 | 11 | 02
INSTITUCIÓN: AMRA 1156-7
AFILIADO: 100000754770800

DETERMINACIÓN DE COLESTEROL HDL
Valor hallado: 47 miligramos %

DETERMINACIÓN DE COLESTEROL TOTAL
Valor hallado: 164 miligramos %

DETERMINACIÓN DE TRANSAMINASA G-P
Valor hallado: 30 unidades por litro a 37º

DETERMINACIÓN DE TIROTROFINA (TSH)
Valor hallado: 1,5 microunidades/mililitro

RÍO PARAGUAY

Entre el 7 y el 17 de abril de 2001, las precipitaciones fueron muy escasas en casi toda la cuenca, con acumulados que en la alta cuenca no superaron los 10 mm.

En el **Pilcomayo**, hoy se registró una lectura de 3,18 m. Se estima que el descenso se sentirá en el tramo inferior en los próximos siete días. El nivel medio, en lo que va de abril, es 3,24 m, valor 1,10 m inferior al nivel promedio del mes desde 1976, pero 0,82 m superior al registrado en igual fecha de 2000.
Formosa registró hoy 4,02 m. Su nivel promedio en lo que va de abril es 4,17 m.
El caudal descargado actualmente al **río Paraná** es del orden de 2800 m^3/seg.

EN LA CARPETA

I. Busquen otras fuentes que informen sobre mediciones y elaboren un listado incluyendo las que puedan proponer otros compañeros.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5 REVISIÓN

INFORME SOBRE EL CRECIMIENTO DE UNA COLONIA DE BACTERIAS *BACILLUS DENDROIDES*

Edad de la colonia, expresada en días	Área, en cm², ocupada por la colonia
0	0,24
1	2,78
2	13,53
3	36,30
4	47,50
5	49,40

TURISMO SUR **Villa La Angostura**

	E	F	M	A	M	J
Temperatura media en ºC.	14	13	11,3	8,2	5,1	2,6
Precipitación media en mm	81,7	72,3	80	168	431	297
Días de precipitación nívea a + de 1200 m	1,3	1,4	2,6	5	10,6	11,4

2 **a.** Clasifiquen las cantidades que aparecen en el problema **1** y registren el criterio que utilizaron para hacerlo.

b. Comparen los criterios utilizados por otros compañeros y subrayen las coincidencias.

3 Seguramente, ya han resuelto algunos problemas en los que hay que calcular el perímetro o el área de una figura.

a. Reúnanse con algunos compañeros y registren en una hoja todas las fórmulas que recuerden para calcular perímetros y áreas de figuras.

b. Respondan a las siguientes preguntas:

- Si un triángulo equilátero y un cuadrado tienen el mismo perímetro, que es de 12,36 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado? ¿Y el lado del triángulo?

- Si un cuadrado tiene un área de 27,5625 m², ¿es posible que el lado mida más de 5,5 m? ¿Por qué?

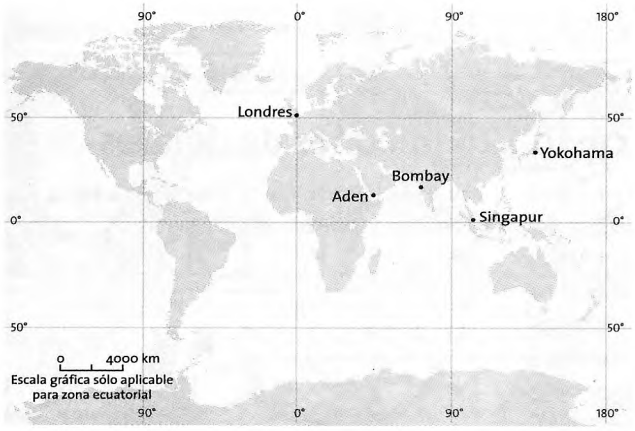
SÍ NO

MEDICIONES Y SISTEMAS DE MEDICIÓN

¿Cómo se indican las distancias? ¿Y la capacidad o el tiempo? Según la cantidad que debe medirse y el momento de la historia, los seres humanos han utilizado distintas unidades y sistemas para resolver problemas que involucran mediciones, y que, muchas veces, requieren comparar datos expresados en distintas formas.

4 A fines del siglo XIX, Julio Verne asombraba a sus lectores con obras de ciencia ficción, como *De la Tierra a la Luna* o *Veinte mil leguas de viaje submarino*, donde anticipaba logros científicos y técnicos que ocurrirían muchos años después.

a. Lean el siguiente fragmento de *La vuelta al mundo en ochenta días* y consideren la información que aparece más abajo.



¡Qué rodeos forzosos entre Londres y Aden, entre Aden y Bombay, entre Calcuta y Singapur, entre Singapur y Yokohama! Si seguimos circularmente el paralelo cincuenta, que es el de Londres, la distancia es tan sólo de unas doce mil millas, mientras que Fileas Fogg tuvo que recorrer, por los caprichos de los medios de comunicación, veintiséis mil millas, de las que había realizado ya diecisiete mil quinientas en la fecha del 23 de noviembre.

1 legua marítima = 3 millas 1 legua terrestre = 5555 m
1 milla náutica = 1852 m (longitud del arco de 1 minuto de meridiano)
1 milla terrestre = 1609 m (20.000 pies)

b. Respondan en una hoja a las siguientes preguntas:

- ¿Qué distancia es mayor: la que recorrió Fileas Fogg, el protagonista de *La vuelta al mundo en ochenta días,* o la que recorrió el capitán Nemo a bordo del submarino Nautilus, que abarcó veinte mil leguas?
- ¿Cuál es la diferencia, en kilómetros, entre Londres y Yokohama y la distancia recorrida por Fogg?

EN LA CARPETA

II. ¿Qué unidades conocen para medir longitudes que no correspondan al sistema decimal? Organícenlas en una tabla con sus equivalencias en metros.

Lean el apartados "Magnitudes, cantidades y medidas" en la página 193 del Anexo teórico.

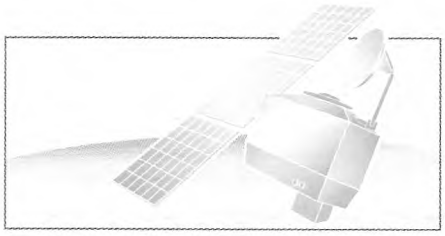
5 Para resolver los problemas anteriores, trabajaron con cantidades correspondientes a distintas magnitudes y usaron distintas unidades. Completen el siguiente cuadro con ejemplos tomados de los problemas **1**, **3** y **4**:

MAGNITUD	CANTIDAD	OTRAS UNIDADES DE LA MISMA MAGNITUD

6 **a.** Lean la siguiente noticia:

Una confusión que costó 125 millones de dólares

Un boletín de la NASA informó que un error en la transferencia de datos produjo la pérdida del satélite meteorológico Mars Climate Orbiter. La nave se colocó en una órbita equivocada al no realizar la correspondiente conversión de unidades (un equipo daba resultados en el sistema decimal inglés y el otro consideraba que venían dados en el sistema métrico decimal). Cuando los instrumentos de navegación indicaban que la nave estaba a una distancia de 140 kilómetros de la superficie marciana, el satélite estaba, en realidad, a sólo 60 kilómetros y, al entrar en la órbita, el esfuerzo y la fricción lo destruyeron.



Fuente: htpp://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/tmp/1998-073A.html

b. Averigüen cuáles son las equivalencias entre unidades del sistema inglés, como la milla, el pie y la pulgada, y unidades del sistema métrico decimal. En una hoja, registren las equivalencias y luego respondan a las preguntas que siguen:

- ¿Qué distancia es menor: 10 millas o 10 km?
- La medida de una cantidad en pulgadas ¿es mayor o menor que su medida en centímetros? ¿Por qué?

COMO HAS DE SABER, AQUÍ NO USAMOS EL CALENDARIO GREGORIANO, SINO EL CALENDARIO MAYA, QUE ES DE BASE VEINTE. AL AÑO LO LLAMAMOS *UN* Y DEBERÍA HABER SIDO DE 400 DÍAS, PERO, PARA HACER UNA MEJOR APROXIMACIÓN AL AÑO SOLAR, CADA *UN* TIENE 18 *UINALES*. ¿ESTÁ CLARO?
BAKTUM = 20 KATUNES
KATUN = 20 TUNES
UN = 18 UINALES = 360 DÍAS
UINAL = 20 DÍAS
KIN = 1 DÍA
SÍ.
8-14-3-1-12
ADEMÁS, NUESTRO AÑO CERO COINCIDE CON EL 3113 A.C. DEL CALENDARIO GREGORIANO. ENTONCES, ¿A QUÉ AÑO CORRESPONDE LA SIGUIENTE FECHA, GRABADA EN EL FRONTISPICIO DE ESTE EDIFICIO? ESTO SE LEE DE IZQUIERDA A DERECHA: BAKTUNES, KATUNES... DÍAS.
ES, A VER, ESTEEEE... CORRESPONDE AL AÑO ..... DEL CALENDARIO GREGORIANO.
EXCELENTE.
AHORA PERMÍTAME HACERLE UNA PREGUNTA.
ESTO ESTÁ FUERA DE TODA NORMA, PERO ADELANTE.
EL CALENDARIO BABILONIO TENÍA DOCE MESES, CON MESES DE 29 Y 30 DÍAS, Y AÑOS BISIESTOS DE TRECE MESES. COMO EN SU SISTEMA DE NUMERACIÓN USABAN DE BASE EL NÚMERO 60, EL DÍA SE DIVIDÍA EN 2 VECES 12 PARTES (ES DECIR, $\frac{1}{5}$ DE 60).
AJÁ...
LA PREGUNTA ES ¿A QUÉ PIENSA QUE SE DEBE LA DIFERENCIA ENTRE LA CANTIDAD DE DÍAS QUE FORMAN UN *UINAL* Y UN MES BABILONIO?
LA RESPUESTA ES TRIVIAL: EVIDENTEMENTE .....
¡AH! ACÁ LLEGA LADISLAO.

Lean el apartado "Unidades y sistemas de medición" en la página 194 del Anexo teórico.

8 Resuelvan en una hoja los siguientes ítem:

a. Expliquen por qué el codo egipcio equivalía a 24 dedos y el codo babilonio, a 30 dedos.

b. Analicen las siguientes cuentas. ¿Por qué los cocientes son distintos si las cifras de los dividendos y de los divisores son iguales?

5 18 16 | 15 + + 7 18 100 260 − 118 − 276 105 270 13 6	5, 1 8 1 6 | 15 + + + + 0,3454 50 60 80 60 − 51 − 68 − 81 − 66 45 60 75 60 6 8 6 6	5 18 16 | 15 + + 21 13 300 180 − 318 − 196 315 195 3 1

9 Completen cuánto aumenta o disminuye* la medida cuando se modifican las unidades según lo que indica la tabla:

EXPRESIÓN DE LA CANTIDAD	NUEVA UNIDAD	CÓMO SE MODIFICA LA MEDIDA	NUEVA EXPRESIÓN DE LA MISMA CANTIDAD
4,05 metros	centímetro		
3680 metros	kilómetro		
450 mililitros	litro		
2,5 toneladas	kilogramo		
15 minutos	segundo		
10.800 segundos	hora		

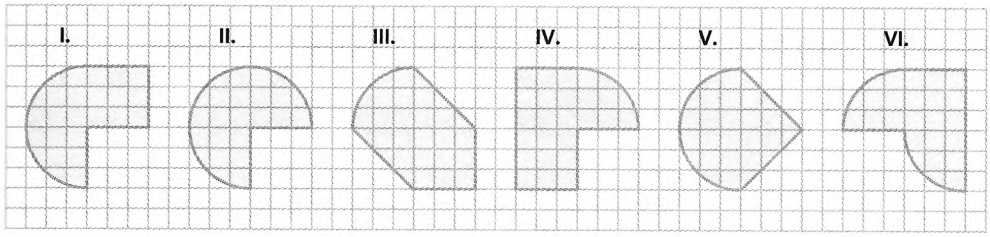
PERÍMETROS Y ÁREAS

Existen registros muy antiguos que dan cuenta de los primeros cálculos de perímetros y áreas para delimitar terrenos. Los cálculos y los conocimientos sobre las figuras que se utilizaban en la Antigüedad fueron evolucionando y dieron lugar a las fórmulas y a las estrategias que usamos actualmente para calcular áreas y perímetros de diferentes figuras.

* **Cambio de unidades**

Cuando se necesita obtener una expresión equivalente de una cantidad utilizando otra unidad, es necesario modificar la medida teniendo en cuenta la equivalencia de unidades.

10 **a.** Comparen la figura **I.** con las restantes figuras.



b. En cada caso, respondan en una hoja lo siguiente: ¿Qué cambia: su área, su perímetro o ambos? Si cambia, ¿aumenta o disminuye?

11 En una hoja, construyan un triángulo con un lado AB de 5 cm, el ángulo A de 30º y el ángulo B de 50º. Luego respondan a las preguntas que siguen:

a. Si se modifica la figura de modo que $\hat{B}$ mida menos de 50º, ¿piensan que se modifica el perímetro del triángulo? Si es así, ¿aumenta o disminuye? ¿Por qué?

b. ¿Cómo se modifica el perímetro del triángulo si $\hat{B}$ mide más de 50º?

c. Si la mínima distancia entre un punto y una recta se obtiene trazando la perpendicular por ese punto a la recta, ¿cuánto debe medir B para que el perímetro del triángulo sea el mínimo posible?

12 **a.** Construyan en una hoja lisa dos triángulos con los siguientes datos:

Triángulo ABC: rectángulo en $\hat{B}$, $\overline{AB}$ de 11,5 cm y $\overline{BC}$ de 7 cm.

Triángulo MNR: $\overline{MN}$ de 8,5 cm, $\overline{NR}$ de 7,4 cm y $\overline{MR}$ de 13,8 cm.

b. Tracen las alturas de los triángulos y para cada uno calculen, en la hoja utilizada, el área tomando las medidas de un lado y de la correspondiente altura. Si necesitan recordar qué es la altura, consulten el apartado "Alturas y medianas de un triángulo" en la página 53 del Anexo teórico.

c. En la misma hoja, contesten la siguiente pregunta:

¿Piensan que se obtiene el mismo valor si se toma otro par de mediciones como dato? Anoten lo que piensen y comprueben calculando el área de cada triángulo con otros pares de datos.

EN LA CARPETA

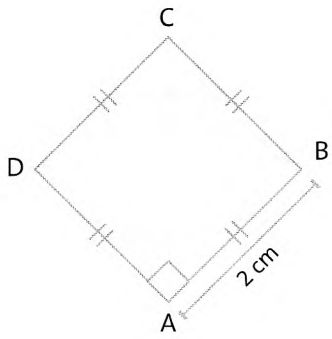
III. Si para expresar un área de medida ***a*** la unidad que se utiliza se reduce a la centésima parte, ¿qué ocurre con la medida: aumente o disminuye? ¿Cuánto?

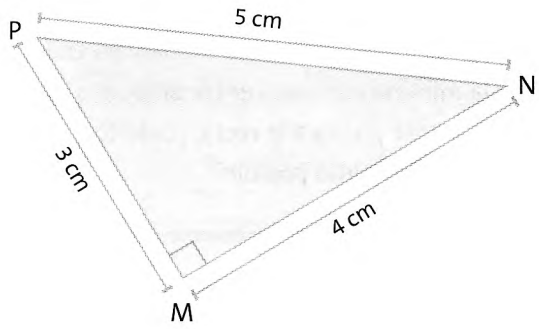
Lean el apartado "Errores en las mediciones y en los cálculos con medidas" en la página 196 del Anexo teórico.

13 **a.** ¿Consideran que los errores de medición que cometieron para resolver el problema anterior son "aceptables"? ¿Por qué?

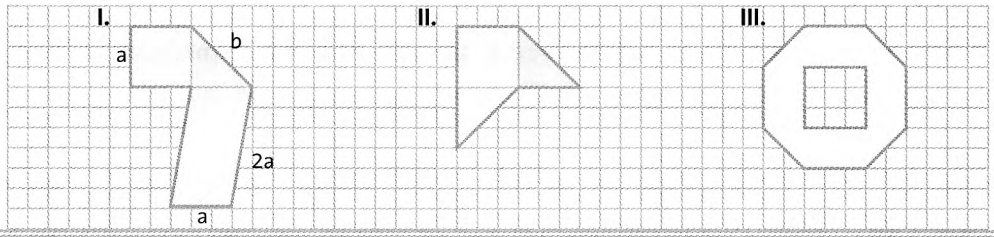
b. Registren en una hoja diez valores obtenidos por distintos compañeros para las áreas de los triángulos del problema **12**. En la misma hoja, estimen cuál podría ser un valor adecuado para expresar cada área y, después, realicen los promedios para comprobar si su estimación fue acertada.

14 Registren en una hoja cómo se modifican el perímetro y el área de las siguientes figuras cuando cada lado aumenta al doble:





15 Utilizando las medidas de los lados que están expresadas con letras, indiquen, si es posible, en una hoja cómo calcular el área y el perímetro de las siguientes figuras:



16 **a.** Reúnan cuatro o cinco objetos de contorno circular y, con una hoja de papel milimetrado o con un hilo y un centímetro de carpintero, midan su contorno y su diámetro.

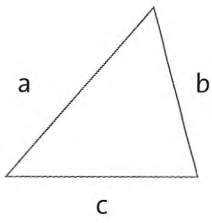
b. Registren los resultados de las mediciones y, para cada caso, calculen el cociente entre el contorno y el diámetro.

Lean el apartado "Perímetro y área de figuras" en las páginas 197 a 201 del Anexo teórico.

17 **a.** Realicen una lista, en una hoja, con las fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas.

b. ¿Consideran que la que obtuvieron en el problema **16** es una buena aproximación de π? ¿Por qué?

18 Una fórmula que se adjudica al matemático Herón, de Alejandría, del siglo I d. C., permite calcular el área de un triángulo a partir de la longitud de sus lados:



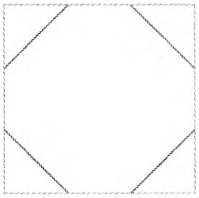
Si s es el semiperímetro del triángulo, entonces:	El área se calcula así:
$s = \frac{a+b+c}{2}$	Área $= \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

Comprueben, con un ejemplo, que usando la fórmula de Herón se obtiene el mismo valor para el área de un triángulo que con la fórmula $b \cdot \frac{h}{2}$. Realicen los dibujos y los cálculos que consideren necesarios en una hoja.

EN LA CARPETA

IV. Escriban cómo puede expresarse el cálculo del área para un triángulo equilátero, usando la fórmula de Herón.

19 En un papiro egipcio del 1700 a. C., se encuentran registrados muchos problemas con sus soluciones. En el problema 50 de ese documento, se calcula el área de un campo redondo de 9 khet de diámetro, de este modo:



En el cuadrado de 9 de lado, se forma un octógono dividiendo los lados en tres partes iguales. Se calcula el área del octógono restando al área del cuadrado las áreas de los triángulos que se ven en la figura:

$$A = 81 - 4 \times \frac{(3 \times 3)}{2} = 63$$

a. Escriban en una hoja si piensan que ésa es una buena aproximación del área del círculo y expliquen por qué.

b. Algunos autores afirman que, para calcular el área de un círculo dado su diámetro, los escribas del antiguo Egipto la aproximaban a la del octógono cuya área se consigue restando al diámetro $\frac{1}{9}$ del diámetro y elevando el resultado al cuadrado. Este procedimiento ¿da una mejor aproximación que la anterior? ¿Por qué? Contesten en una hoja.

ÁREAS, VOLÚMENES Y OTRAS MEDIDAS

Al observar los cuerpos en el espacio, se descubren magnitudes como el volumen, la capacidad, la masa y el peso. Pero ¿cómo varían estas magnitudes cuando varía o se deja constante otra?

20 Lean el siguiente diálogo y luego resuelvan en una hoja las consignas **a.** y **b.**

EMILIA: –¿Me acompañás al supermercado a comprar leche larga vida? Mi mamá me encargó 26 litros para el comedor de un jardín de infantes del barrio.

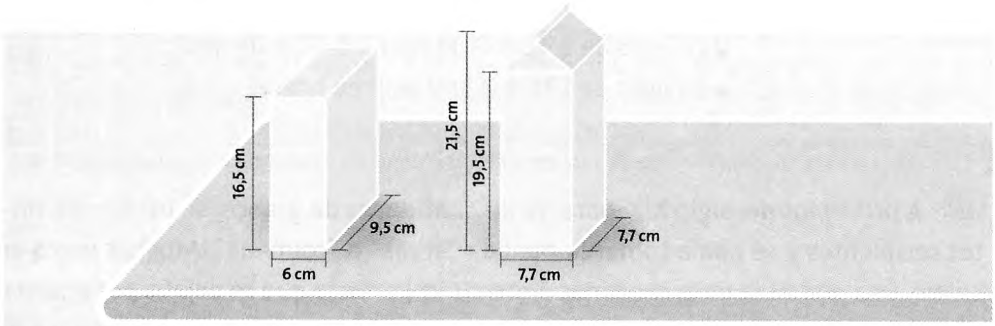
LISANDRO: –¡Vamos!

EMILIA: –¿Podremos llevar la compra los dos solos?

LISANDRO: –Yo pienso que en una caja grande entra todo. Además, no creo que sea muy pesado.

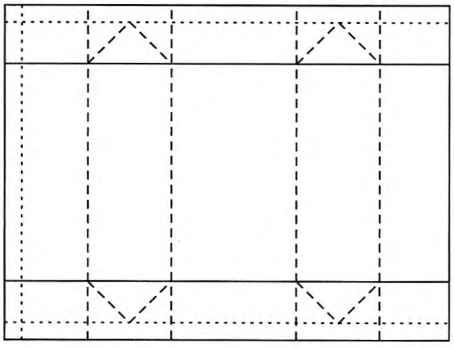
a. Los chicos ¿pudieron llevar solos la compra o tuvieron que buscar ayuda? ¿Qué tamaño tendría que tener una caja para contener la compra?

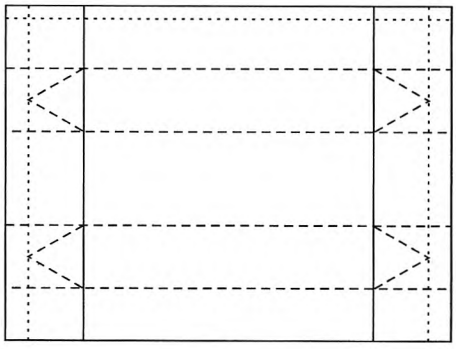
b. En una de las salidas del supermercado, hay cajas de aproximadamente 35 cm por 25 cm en la base y 40 cm de altura. ¿Alcanza una para llevar los 26 cartones? Si se quiere usar una sola caja ¿da lo mismo comprar la leche en cualquiera de los envases dibujados?



21 En el dibujo de la izquierda, se muestran las dimensiones y marcas de plegado de un envase de jugo de 250 cm³.

a. Si se pliega el cartón en otro sentido, como se muestra en el dibujo de la derecha, ¿piensan que entraría la misma cantidad de jugo? ¿Por qué?





SÍ NO

b. Un envase realizado con la mitad del cartón ¿contiene la mitad de jugo? ¿Por qué?

SÍ NO

EN LA CARPETA

V. Diseñen un envase para contener 750 cm³ de jugo. Indiquen las medidas necesarias para poder armarlo.

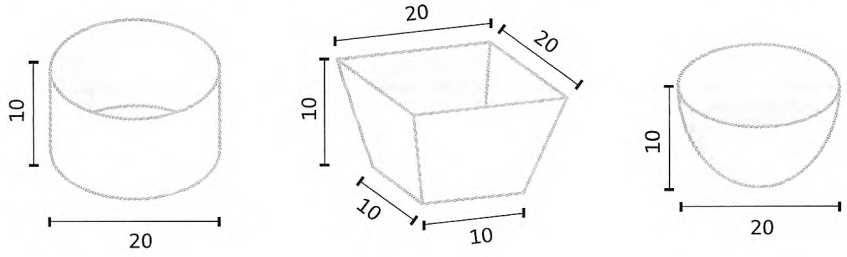
Lean el apartado "Área y volumen de cuerpos" en las páginas 202 a 204 del Anexo teórico.

22 En una hoja, calculen*, si es posible, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos, utilizando $\pi \cong 3{,}14$. Si no pueden resolverlo, indiquen qué información extra necesitarían.

- Prisma de base cuadrada de 72,25 cm² de base y 7 cm de altura.
- Prisma de 18 cm² de base y 7 cm de altura.
- Cilindro de 9,42 cm² de base y 2,5 cm de altura.
- Cilindro de 171,444 cm² de área lateral.

23 A principios del siglo XIX, para medir cantidades de granos, se usaban distintos recipientes y se podía tomar la medida "al ras" o "colmada". Muchas veces el *colmo,* una pirámide de granos más o menos imperfecta que se dejaba por encima de la boca del recipiente, era la ganancia del comerciante o el impuesto para el señor feudal.

¿Piensan que a un comerciante de la época le habría dado lo mismo usar cualquiera de estos recipientes? ¿Por qué? Escriban sus respuestas en una hoja.



Lean los títulos y subtítulos de los apartados correspondientes al capítulo "Mediciones y cálculo con medidas" en el índice del Anexo teórico.

24 Comparen los títulos leídos con los que tienen en las hojas de carpeta que usaron para estudiar ese capítulo. Si no tienen nada registrado para alguno de ellos, relean el apartado y realicen en una hoja una breve síntesis de su contenido.

* **Fórmulas y elementos de los cuerpos**

Cuando se calculan áreas y volúmenes con fórmulas es importante identificar la información con las que se cuenta y reconocer cada elemento en la figura o el cuerpo correspondiente.

1 | EJERCITACIÓN

25 Completen las siguientes expresiones para que resulten equivalentes:

$0{,}125\ g = \frac{1}{8}$ ___ $\frac{1}{2}$ ml = ___ cl

26 **a.** Dibujen una figura combinando un triángulo y un rectángulo que tengan la misma altura, y calculen su área.
b. ¿Cuánto varía el área de la figura anterior si la altura del triángulo se duplica? ¿Y si se reduce a la mitad?

27 **a.** Lean la fórmulas de la fichas en la página 85 del Anexo teórico.
b. Elijan tres o cuatro fórmulas y elaboren problemas en los que sea necesario utilizarlas.

2 | MÁS PROBLEMAS

28 En el 1700, las cuadras de la ciudad de Buenos Aires tenían 150 varas de largo y los terrenos medían $17\frac{1}{2}$ varas de frente y 75 varas de fondo.
a. Determinen si las manzanas y los terrenos de la actualidad son similares o no a los de esa época. Para hacerlo, tengan en cuenta que la vara de Buenos Aires varió con el transcurso de los años, de 0,849 m, en 1741, a 0,8677 m, en 1822.
b. Había una vara agraria que difería de la vara municipal usada en medidas urbanas y que variaba de 0,8361 m, en San Juan y Catamarca, a 0,8685 m, en Entre Ríos.
¿Consideran que había mucha diferencia entre tener un terreno de 150 varas de lado en San Juan y otro en Entre Ríos? Anticipen primero un resultado y luego verifiquen su estimación.

29 En un sobre de semillas de zanahoria para huerta familiar, se indica: "Se siembra durante todo el año a chorrillo, en surcos distanciados a 20 cm, utilizando 3 gramos de semilla por metro cuadrado".
¿Cuántos gramos de semilla se necesitan para sembrar una parcela de 80 cm por 2,50 m?

30 Un hormiguicida concentrado se vende en dos envases distintos.

1000 cm³ (botella)	**250 cm³ (frasco)**
Diluir 10 cm³ por litro de agua.	Tres tapitas cada 2 litros de agua.

Si el frasco cuesta la tercera parte de lo que cuesta la botella, ¿qué envase conviene comprar?

31 **a.** ¿Cuál es el área de los círculos de acetato que se usan para proteger los CD de audio?
b. Si al realizar el cálculo anterior se utilizan distintas aproximaciones de π o distintos valores para la medición del radio, se obtienen distintos valores para el área. ¿Creen que los resultados difieren mucho? Registren sus anticipaciones y después verifíquenlas.

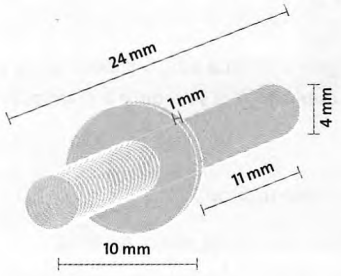
32 **a.** Calculen la cantidad de cartulina necesaria para construir cada uno de estos recipientes de base cuadrada. Registren en un cuadro las áreas de la base, lateral y total.

- Recipiente A: La base es de 1 dm² y la altura es de 10 cm.
- Recipiente B: La base es $\frac{1}{4}$ de la base del recipiente A y la altura es de 10 cm.
- Recipiente C: La base es $\frac{1}{4}$ de la base del recipiente A y la altura es $\frac{1}{4}$ de la altura de dicho recipiente .

b. Comparen las áreas obtenidas. ¿Hay alguna que sea la cuarta parte de otra? ¿Pueden relacionarlas utilizando otra fracción?

c. Expresen el volumen del recipiente B y del C en relación con un decímetro cúbico.
Comparen los recipientes A, B y C. ¿Coincide la variación de alguna de sus áreas (de la base, lateral o total) con la variación del volumen?

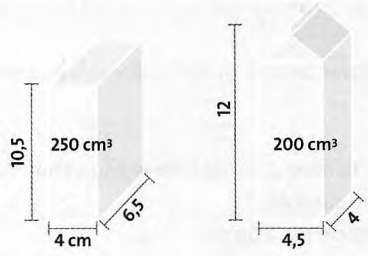
33 En una fábrica, se producen piezas para repuestos de grifería, como ésta:



¿Cuál es el costo del material necesario para fabricarlas si
a. se hacen de bronce que cuesta $8 el kilo y cada cm^3 pesa 7,8 g?
b. se hacen de hierro que cuesta $3 el kilo y cada cm^3 pesa 8,7 g?

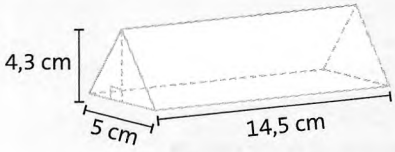
3 | PROBLEMAS PARA REPASAR

34 Consideren las siguientes dimensiones de dos envases de jugo:



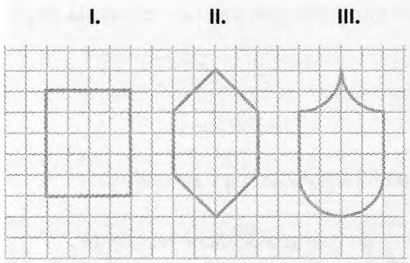
a. ¿En cuál se usa más cantidad de cartón? Para calcularlo, tengan en cuenta las aletas necesarias para armar el envase, como en el problema **21** del Trabajo Práctico Nº 5.
b. Si se compara la relación entre el cartón necesario para hacer el envase y la capacidad que contiene, ¿qué envase resulta más conveniente para el fabricante? ¿Por qué?

35 Al calcular el volumen de este prisma, Ana y Sergio resolvieron así:



Ana: 14,5 cm x 5 cm x 4,3 cm = 311,75 cm^3.
Sergio: 5 cm x 4,3 cm^2 : 2 = 10,7 cm^2 y
10,7 cm^2 x 14,5 cm = 155,15 cm^3
a. ¿Cuál de los procedimientos es correcto? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es el volumen del prisma?

36 Los alumnos de 7º de una escuela quieren confeccionar distintivos de egresados. Determinen cuál de los siguientes modelos puede resultar más económico teniendo en cuenta la cantidad de material, lo que se desperdicia y la cinta para el borde.



El profesor propone un juego con los siguientes pasos:
- Él dice un número y hay que multiplicarlo por 4.
- Luego, los alumnos eligen otro número y lo multiplican por 4.
- Después los alumnos restan el resultado del primer paso del resultado del segundo paso y la resta tiene que dar 12.

a. ¿Cómo les coviene a los alumnos elegir el número para ganar?
b. ¿Y si la diferencia tiene que dar 24?

T. P. 6 | Razones y proporciones

1 Entre 1991 y 1995, más de 500.000 alumnos de 15.000 escuelas de 45 países de todo el mundo participaron del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. El objetivo del estudio era conocer el nivel de rendimiento de los alumnos, comparar los resultados entre países y tratar de explicar las diferencias observadas en función de las distintas características de los sistemas educativos.

a. Resuelvan los siguientes problemas, que son similares a los que se tomaron en esa oportunidad.

Marquen las respuestas correctas con una cruz:

I. Los tres quintos de los alumnos de una clase son chicas.
Si se añaden a esa clase 5 chicas y 5 chicos, ¿qué afirmación es cierta?

- Hay más chicas que chicos. ☐
- Hay igual número de chicas que de chicos. ☐
- Hay más chicos que chicas. ☐
- Con la información dada, no se puede saber si hay más chicas que chicos. ☐

II. Para obtener una pintura de un cierto color, Ana mezcla 5 litros de pintura roja, 2 litros de pintura azul y 2 litros de pintura amarilla.
¿Cuál es la proporción de pintura roja en el total de la mezcla?

- $\frac{5}{2}$ ☐
- $\frac{9}{4}$ ☐
- $\frac{5}{4}$ ☐
- $\frac{5}{9}$ ☐

EN LA CARPETA

I. Determinen para qué números naturales m y n las siguientes razones resultan equivalentes:

a. $\frac{m}{8} = \frac{6}{n}$ b. $\frac{m}{7} = \frac{9}{n}$ c. $\frac{m}{7} = \frac{3,5}{n}$

III. Una clase tiene 28 alumnos. La relación entre chicas y chicos es de 4 a 3. ¿Cuántas chicas hay en la clase?

- 12 ☐
- 16 ☐
- 20 ☐
- 21 ☐

IV. El 20% de los alumnos de un grupo han obtenido un Sobresaliente en Matemática. ¿Cuál de los siguientes gráficos de sectores se corresponde con esta afirmación?

- El gráfico 2. ☐
- Los dos gráficos. ☐
- El gráfico 1. ☐
- Ninguno de los gráficos. ☐

GRÁFICO 1

GRÁFICO 2

V. El costo de la publicidad en un periódico depende del área que ocupa. Si un anuncio de 5 cm por 8 cm cuesta $2000, ¿cuánto costará otro de 6 cm por 10 cm?

- $3000 ☐
- $2500 ☐
- $2400 ☐
- $4000 ☐

b. Si hubieran participado del estudio, ¿cuáles habrían sido sus notas en esta parte de la prueba? Realicen su autoevaluación. Para eso, consideren que cada respuesta correcta vale 10 puntos y que, si obtienen 50 puntos, les corresponde un 10.

PROBLEMA	I	II	III	IV	V	NOTA
PUNTAJE						

RAZONES EQUIVALENTES

Aunque seguramente ya saben resolver muchos problemas utilizando la regla de tres, es conveniente tener en cuenta otras formas de resolver problemas en los que hay que comparar cantidades.

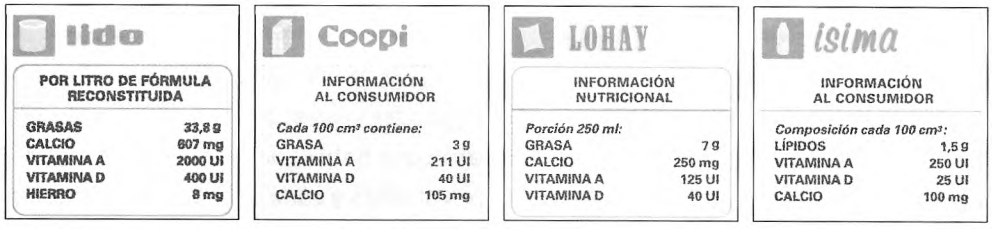
2 Los productos lácteos aportan diferentes cantidades de proteínas, grasas, carbohidratos, vitaminas y minerales. En los comercios, se encuentran muchas marcas, pero no siempre es fácil comparar la información nutricional que aparece en los distintos envases. Resuelvan las consignas **a.** y **b.** en una hoja.

a. Ana dice que la marca de yogur Lecherísima tiene casi cinco veces menos de grasa que la marca Pandy.

¿Están de acuerdo con la afirmación de Ana? ¿Por qué?

SÍ	NO

b. Comparen estos productos. Luego respondan en una hoja a las siguientes preguntas*:



- ¿Cuál elegirían si se trata de comprar la leche que tiene más vitamina A?
- ¿Cuál elegirían si quisieran comprar la leche que tiene más calcio?
- ¿Y si quisieran comprar la que tiene menos grasa?

* **Seleccionar la información**
En general, cuando se considera una pregunta de un problema, a veces se dispone de más información que la necesaria. Por lo tanto, para responderla, habrá que seleccionar los datos por su relación con la pregunta planteada.

EN LA CARPETA

II. Si tuvieran que decidir entre dos marcas de galletitas de un gusto muy similar, ¿qué propiedades compararían para elegir una de ellas? Justifiquen la respuesta.

c. Algunas organizaciones internacionales indican que, para poder poner en el envase que una leche está fortificada con vitamina A, ésta debe contener 2000 UI por litro. ¿Cuáles de las marcas anteriores podrían cumplir con esta norma? ¿Por qué?

d. La Organización Mundial de la Salud recomienda para los adolescentes un consumo de 600 a 700 miligramos por día de calcio. ¿Qué cantidad de leche de cada una de las marcas de **b.** tendrían que tomar para cubrir ese consumo?

lido	Coopi	LOHAY	ísima

3 En un club, se elige la comisión directiva en forma proporcional a los votos de los socios. La comisión tiene 20 miembros. En el 2000, estaba formada por 6 mujeres y 4 varones de la Agrupación Verde, y por 5 mujeres y 5 varones de CCC. En las dos últimas elecciones, los resultados fueron los siguientes:

VOTOS	VOTOS 2000		VOTOS 2002	
Agrupación	Femeninos	Masculinos	Femeninos	Masculinos
Agrupación Verde	203	151	75	102
CCC	161	180	79	91

Las dirigentes de la Agrupación Verde afirmaron que había que dejar la misma comisión porque se había presentado la mitad de votantes y cada agrupación mantenía la proporción de la elección anterior. En cambio, los miembros de CCC respondieron que lo justo era que cada agrupación tuviera 4 mujeres y 6 varones en la comisión. Si fueran miembros del club, ¿qué argumentos a favor de CCC podrían dar? ¿Y a favor de la Agrupación Verde? Reúnanse con varios compañeros, cada uno elija una agrupación para defender sus razones y decidan entre todos cuál podría ser una solución. Escriban sus conclusiones en una hoja aparte.

En el apartado "Proporciones", en la página 168 del Anexo teórico, pueden encontrar una forma de determinar si las relaciones entre dos cantidades son o no equivalentes.

4 Escriban cuatro proporciones a partir de las relaciones entre las cantidades que compararon para resolver los problemas **2** y **3**.

____ = ____	____ = ____	____ = ____	____ = ____

5 Resuelvan las siguientes consignas en una hoja:

a. Encuentren números m, n y t para los que se verifique que $\frac{m}{n} = \frac{t}{3}$. *

b. Alejandro dice que, para encontrar esos números, también se puede pensar que la razón entre t y m tiene que ser la misma que entre 3 y n. ¿Piensan que está en lo cierto? ¿Por qué?

c. Sandra dice que encontró que la proporción vale para $n = 14$ y $t = 5$. ¿Es posible saber si lo que hizo está bien sin conocer el valor que propuso para m? ¿Por qué?

d. Encuentren números m y n que verifiquen que $\frac{m+3}{n+4} = \frac{3}{4}$. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

6 **a.** Comparen las resoluciones del siguiente problema, realizadas por dos alumnos. Si 30 cuadernos cuestan $70, ¿cuánto cuestan 50 cuadernos?

ALUMNO A

30 c ——— $70

1 c ——— $70 : 30 = $2,33

50 c ——— $2,33 x 50 = $116,50

ALUMNO B

$\frac{30}{70} = \frac{50}{x}$ $\quad 30 \cdot x = 70 \cdot 50$

$x = \frac{3500}{30} = 116,66$

b. ¿Por qué obtuvieron distintos resultados?

* **Entender expresiones con letras**

Para comprender mejor una expresión con letras, conviene pensarla reemplazando las letras por números, de modo que para la misma letra corresponda el mismo número.

EN LA CARPETA

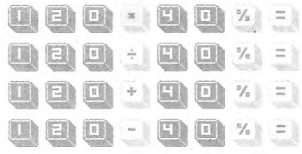
III. Expresen como razón la relación entre varones y mujeres en las familias de 10 compañeros. ¿Hay razones equivalentes? ¿Piensan que variarían mucho los resultados si tomaran familias de otros 10 compañeros? ¿ Por qué?

PORCENTAJES E ÍNDICES DE VARIACIÓN

En las operaciones comerciales, es frecuente el uso de porcentajes y de índices que permiten interpretar y calcular, por ejemplo, variaciones de precios. Si bien en estos casos también es posible recurrir a la "regla de tres", conocer las propiedades de las proporciones permite descubrir nuevas herramientas de cálculo.

7 En muchas situaciones de la vida cotidiana, se usa una calculadora para determinar un descuento en una compra o en una venta.

a. ¿Qué valores piensan que se observarán en el visor de la calculadora si se marcan las siguientes teclas? Anoten lo que piensan y después verifíquenlo con la calculadora.



b. ¿Piensan que se obtienen los mismos resultados si se marcan los números en otro orden; por ejemplo, 40 x 120% ó 120 x 40%? ¿Por qué?

SÍ	NO

c. Anoten los pasos que hay que seguir con la calculadora para obtener:

- El porcentaje que representa la razón entre dos cantidades, *x* e *y*.
- El tanto por ciento, es decir, *x*%, de una cantidad *y*.
- El resultado de realizar un descuento del *x*% a una cantidad *y*.
- El resultado de aumentar en un *x*% una cantidad *y*.

d. Comparen las instrucciones escritas para **c.** con las obtenidas por otros compañeros. ¿Todas las calculadoras funcionan igual?

SÍ	NO

8 En un comercio, una camisa cuesta $50. Juan, el vendedor, marca en su calculadora 50 x 0,85 y le cobra al cliente lo que marca el visor.

a. ¿Qué descuento le hizo?

RESPUESTA:

b. Juan quiere usar, si es posible, una sola operación para obtener los precios finales de los artículos después de hacer un descuento.
¿Qué operación puede hacer para obtener el precio de un artículo rebajado en un 20%? ¿Y si la rebaja es del 25% ? ¿Y si es del 40%?

c. El dueño llama por teléfono a Juan y le dice que aumente los precios un 15%. ¿Por cuánto tiene que multiplicar los precios viejos para obtener los nuevos?

d. Juan marca un artículo con una rebaja del 20% y pone un cartel de $600. Al día siguiente, el dueño le dice que anule la rebaja y el vendedor, que no recordaba bien el precio inicial, decide calcularlo sumándole a 600 un 20%. ¿Está bien la operación que hace Juan? ¿Por qué?

SÍ	NO

Lean el apartado "Porcentaje" en la página 169 del Anexo teórico.

9 Revisen cómo resolvieron los problemas **7** y **8**. ¿Podrían haberlos realizado con menos pasos? Si es así, anoten cómo.

10 Estela y Daniel ahorraron $10.000. Por horas extras en su trabajo a Estela le pagaron $1.200. ¿Qué porcentaje de lo que tenían ahorrado represesenta esta cifra?

EN LA CARPETA

IV. Midan y determinen cuáles son los ángulos que corresponden a los sectores del gráfico sobre la intención de voto que figura en la página 170 del anexo teórico. Si el gráfico se realizó sobre una muestra de 2000 personas, ¿cuántos encuestados eligieron a cada candidato?

¿LADISLAO? EL DIPLOMA.
¿QUÉ SIGNIFICA ESTO?
HICE LO QUE USTED ME PIDIÓ: COMO EL ORIGINAL MIDE VEINTE CENTÍMETROS Y EL MARCO ES PARA LÁMINAS DE TREINTA Y CINCO, HICE UNA AMPLIACIÓN AL 75%.
¿CÓMO ES POSIBLE? ¡ESTÁ MINTIENDO! LA FOTOCOPIADORA NO AMPLÍA AL 75%.
¡SÍ! ¿CÓMO SE ENTERÓ? TUVE QUE HACER PRIMERO UNA AMPLIACIÓN AL 50% Y LUEGO OTRA AL 25%.
LADISLAO, HAZNOS EL FAVOR DE RESOLVER ESTOS EJERCICIOS: SI HUBIERAS REDUCIDO EL DIPLOMA AL 50%, ¿NO?, Y DESPUÉS AMPLIARAS LA REDUCCIÓN AL 25% Y OTRA VEZ AL 25%, ¿QUÉ RESULTARÍA?
UNA LÁMINA MÁS... IGUAL QUE EL ORIGINAL.
AJÁ. PUEDES ESCRIBIR LOS ÍNDICES PARA JUSTIFICAR LAS RESPUESTAS A ESTOS PROBLEMAS?
NO SABE LO QUE DICE...
LADISLAO, SI USTED REDUCE UNA LÁMINA AL 50%, LUEGO AL 30% Y FINALMENTE AL 20%, ¿QUÉ RESULTADO OBTIENE?
YO, EH... TREINTA MÁS VEINTE, ESTEEE... ¡AH, CLARO! LA IMAGEN YA NO EXISTE: DESAPARECIÓ.
X.1,5.1,25=
1,25
×1,5
625
125
1,875
X.0,15.1,25.1,25
AJÁ. ¿PODRÍAS EXPLICAR EL CÁLCULO?
0,5-0,3-0,2=0
YA NO HAY DUDA: LOS RESULTADOS DE SUS CÁLCULOS SON ABSURDOS, YA QUE .....
¡A ÉL, QUE NO ESCAPE!

12 Las personas cambian de lugar de residencia por distintos motivos: razones de trabajo, de estudio, mejores condiciones de vida y otros.
Observen el siguiente cuadro, donde se registran los valores correspondientes al crecimiento natural y al crecimiento debido a migraciones, durante el período 1990-1996, para las provincias de Cuyo y la Patagonia.
Contesten en una hoja las preguntas que aparecen a continuación del cuadro.

DIVISIÓN POLÍTICO-TERRITORIAL	PERÍODO 1990-1996			
	CRECIMIENTO	TOTAL (EN ‰)	NATURAL (EN ‰)	MIGRATORIO (EN ‰)
Chubut		25,3	17,4	7,9
Mendoza		13,9	14,8	–0,9
Neuquén		41,3	20,8	20,5
Río Negro		22,4	17,1	5,3
San Juan		9,8	17,5	–7,8
San Luis		26,2	17,0	9,2
Santa Cruz		28,7	19,8	8,9
Tierra del Fuego		65,6	25,0	40,6
Total del país		13,3	12,2	1,1

Fuente: Indec

a. ¿Qué significa que el país tuvo un crecimiento del 13,3 por mil en 1990-1996?

b. ¿Cómo se relacionan los valores de las tres columnas numéricas de la tabla? ¿Cómo pueden interpretar que en algunas provincias el crecimiento migratorio tiene un signo menos?

c. ¿Cuál fue la provincia que, en ese período, tuvo el mayor crecimiento natural? ¿Y la que tuvo el mayor crecimiento migratorio?

d. Reúnanse con algunos compañeros. Elijan las cuatro provincias que tuvieron un mayor crecimiento debido a las migraciones y calculen cuál es el porcentaje del crecimiento total que corresponde al crecimiento natural y cuál, al migratorio.

EN LA CARPETA

V. Discutan acerca de las razones que pueden ocasionar las diferencias en el crecimiento de la población. Escriban las conclusiones.

PROPORCIONES Y REPARTOS

Al utilizar divisiones para resolver problemas de reparto, se busca que éste se realice en forma equitativa, pero en algunos problemas es necesario hacerlo según otros criterios.

13 Un alumno resolvió el siguiente problema y, cuando hizo la comprobación, descubrió que faltaban $10. Revisó su procedimiento, pero estaba seguro de haber razonado bien y no encontró el error. En una hoja, expliquen qué ocurrió.

Cuatro socios repartieron $500 que cobraron por un trabajo de pintura, de modo que las ganancias fueran proporcionales al tiempo que trabajó cada uno. Carlos trabajó 6 horas; Nelson, 12 horas; José, 8 horas y León, 9 horas. ¿Cuánto cobró cada socio?

CADA UNO TRABAJÓ

Carlos: $\frac{6}{35}$

Nelson: $\frac{12}{35}$

José: $\frac{8}{35}$

León: $\frac{9}{35}$

$6 + 12 + 8 + 9 = 35$

$\frac{6}{35} \times 500 = 0{,}17 \times 500 = 85$

$\frac{12}{35} \times 500 = 0{,}34 \times 500 = 170$

$\frac{8}{35} \times 500 = 0{,}22 \times 500 = 110$

$\frac{9}{35} \times 500 = 0{,}25 \times 500 = 125$

$85 + 170 + 110 + 125 = 490$

Lean "Uso de las propiedades de las proporciones: reparto proporcional" en las páginas 177 y 178 del Anexo teórico.

14 **a.** En una hoja, comparen la resolución del problema anterior que ustedes hicieron con la que aparece en el apartado.

b. ¿Qué resolución usarían para explicarle a un compañero cómo repartir cantidades en forma proporcional?* ¿Por qué?

15 Lean el capítulo 2, "Números racionales positivos", y hagan en una hoja una lista de las definiciones relacionadas con expresiones y con cálculos con porcentajes.

* **Controlar las proporciones**

Cuando se plantea una proporción, es importante distinguir si cada razón es un cociente entre números o entre cantidades. En el último caso, habrá que controlar que a cada razón correspondan las mismas unidades, es decir, que ambas puedan interpretarse del mismo modo.

1 | EJERCITACIÓN

16 Si $\frac{1}{4}$ equivale al 25%:

a. ¿Qué fracciones corresponden a los siguientes porcentajes? 30%, 16%, 12%, 120% y 250%.

b. ¿Qué porcentajes corresponden a las siguientes fracciones? $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$.

17 Para calcular mentalmente, es posible utilizar algunas equivalencias; por ejemplo, dividir por 4 para calcular el 25%. ¿Cómo conviene resolver los siguientes enunciados para calcular mentalmente?

a. el 50% de una cantidad?

b. el 75% de una cantidad?

c. un aumento del 25% sobre una cantidad?

d. un descuento del 20% sobre una cantidad?

18 Estimen el valor aproximado de los siguientes porcentajes:

a. 28% de 4000. **b.** 40% de 5980.

c. 19,6% de 743. **d.** 56,2% de 5000.

19 Analicen si se cumplen las siguientes propiedades si $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, entonces:

a. $a - \frac{b}{b} = c - \frac{d}{d}$ **b.** $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ **c.** $\frac{a-b}{c} = \frac{c-d}{a}$ **d.** $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

20 Para obtener el 35% de 1500, Tatiana calculó así: "El 10% es 150, así que el 35% es 150 + 150 + 150 + 75".

a. ¿Cómo pueden justificar si lo que hizo es correcto?

b. Den otro ejemplo de una descomposición de un porcentaje que les permita realizar el cálculo mentalmente.

21 Se suman dos porcentajes de una misma cantidad. Se sabe que uno es el 25% y que la suma no supera el 40%. ¿Cuál puede ser el otro porcentaje?

2 | MÁS PROBLEMAS

22 En una elección, se dieron los resultados que muestra la tabla, donde aparece el nombre del partido y el sexo de quienes lo votaron.

	PARTIDO VERDE	RARTIDO ROJO	EN BLANCO
Hombres	120	140	40
Mujeres	60	80	10

a. ¿Cuál es el porcentaje de hombres entre los votantes?

b. ¿Cuál es el porcentaje de votos del Partido Verde entre los hombres que votaron?

c. Confeccionen un gráfico que muestre los resultados de la elección.

23 Ana y César van a comprar una heladera con un descuento del 15% por pago en efectivo. Ana dice que, como hay que agregarle el IVA, conviene calcular primero el IVA y después el descuento para que le descuenten más. César dice que conviene hacer la cuenta al revés. ¿Qué piensan ustedes? Justifiquen su decisión.

24 Cinco vecinos de una cuadra deciden arreglar la vereda y pagar los gastos de forma proporcional a los metros de frente que tiene cada uno. Dos tienen casas de 12 m de frente; otros dos, de 15 m y hay un negocio de 20 m de frente. ¿Cuánto deberá pagar cada uno si el arreglo de la vereda cuesta $5000?

25 ¿Da lo mismo aumentar un 40% y disminuir un 40% que aumentar un 30% y disminuir un 30%? ¿Por qué?

26 Tienen un año de plazo para pagar una deuda de $1000. Si les ofrecen cobrarles un interés del 2% mensual o del 30% anual, ¿qué elegirían? ¿Por qué?

27 Un cine sube el precio de la entrada de $7,50 a $9. Respondan a las siguientes preguntas teniendo en cuenta que el número de entradas vendidas disminuye un 15%.
a. ¿Piensan que la recaudación aumentó o disminuyó? Compruébenlo y calculen el índice de variación.
b. ¿Cuánto tendría que valer la entrada para que una disminución del 15% no afecte la recaudación?

28 En un mapa de su provincia, midan la distancia entre dos localidades que conozcan y que estén comunicadas por una ruta.
a. Usen la escala para calcular la distancia en la realidad. ¿Cuál es la diferencia entre esta distancia y la que es necesario recorrer por la ruta?
b. Conociendo la zona, ¿piensan que es posible conectar esas localidades con una ruta más corta?

29 La suma de tres números es 228.000. ¿Cuáles son los números si el segundo es la cuarta parte del tercero y éste es el triple del primero?

30 Durante el año 2002, el gasoil aumentó de precio y el litro pasó de costar $0,60 a costar $1,25.
a. ¿Cuál fue el índice de variación en el precio?
b. Si un camión tiene un consumo promedio de 15 litros cada 100 km y recorre un promedio de 10.000 km por mes, estimen cuánto varió el gasto anual.

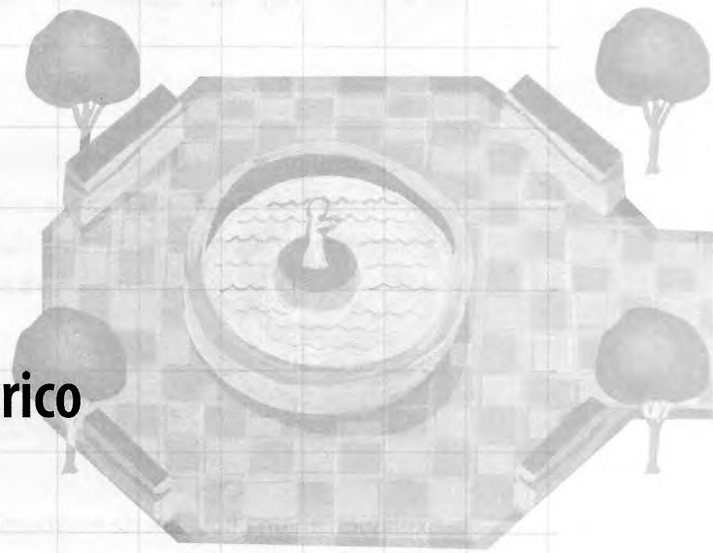
31 Una jarra contiene medio litro de jugo, con 20% de jugo concentrado y 80% de agua. Si se agrega un cuarto litro de agua a la jarra, ¿cuál es el porcentaje de agua en la mezcla?

2 | MÁS PROBLEMAS

32 Resuelvan por aproximación, sin usar la calculadora, lo que se indica en **a.** y **b.**
a. Si un cuadrado tiene un área de 260 cm^2, ¿cuánto mide el lado?
b. Si un cubo tiene un volumen de 1800 cm^3, ¿cuánto mide su arista?

33 Para cada uno de los siguientes cálculos, estimen el resultado, anoten en una hoja si este valor es mayor o menor que el resultado exacto y después comprueben si realizaron una buena estimación.
- 1842 : 7,9
- 1842 : 0,025
- 1800 : 11
- 1685 x 100,25
- 1685 x 1001
- 2,5% x 1685
- 2,9% x 1685

34 Un mantel cuadrado tiene 1,50 m de ancho. Se desea colocar una puntilla alrededor, pero sólo hay 5 m de ella. ¿Alcanzaría la puntilla si se transforma el mantel para hacerlo redondo?



T. P. 7 | Lugar geométrico

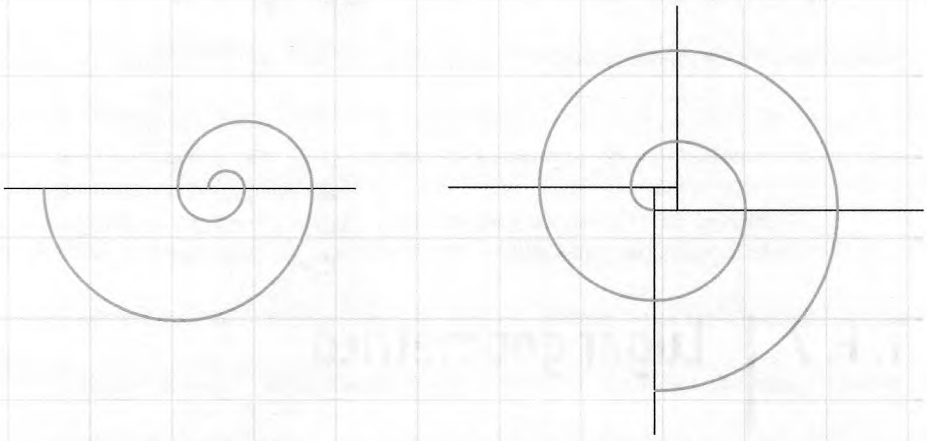
1 Este plano corresponde al centro de la ciudad de Villaverde, donde viven Julio y Ferny. También se identificaron los lugares donde hay bares, ya que decidieron encontrarse a estudiar en alguno que esté a igual distancia de la casa de cada uno de ellos.

a. Indiquen con un color los bares que están más cerca de la casa de Julio. Con otro color, los que estén cerca de lo de Ferny.
b. Identifiquen los bares que cumplen con la condición exigida por los dos amigos.
c. Ubiquen otros puntos que se encuentren a igual distancia de la casa de los dos amigos.

EN LA CARPETA

I. Marquen un punto y dibujen tres circunferencias que pasen por dicho punto. Comparen con lo que hicieron otros compañeros y verifiquen si los dibujos son iguales.

2 **a.** En una hoja lisa, reproduzcan cada una de las siguientes espirales:



b. Expliquen en una hoja aparte el procedimiento que encontraron para hacer la tarea.

3 **a.** Utilicen el compás y una regla no graduada para construir en una hoja aparte un segmento de la misma medida que el segmento MN.

M ——— N

b. Expliquen el procedimiento utilizado para realizar la tarea.

4 Si sólo disponen de papel, lápiz, regla no graduada y compás para encontrar el punto medio del segmento CD, ¿es correcto el siguiente procedimiento? ¿Por qué?

C ——— D

PROCEDIMIENTO

I. Con centro en C, trazar una circunferencia y hacer lo mismo con centro en D. Las dos circunferencias deben ser iguales y cortarse en dos puntos, A y B.

II. Unir A con B. El punto donde el segmento AB corta al segmento CD es el punto medio del segmento CD.

PUNTOS Y CONDICIONES

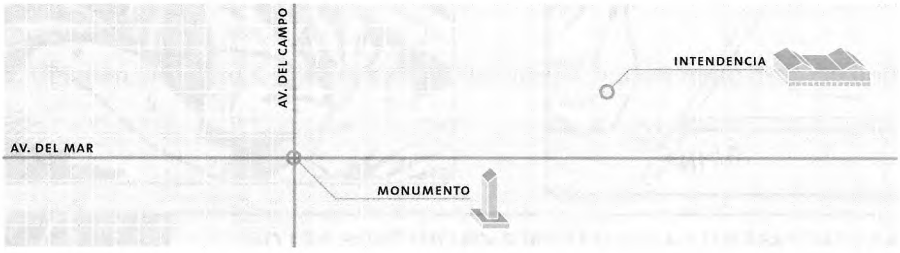
Algunos conjuntos de puntos cumplen con una condición determinada y, por eso, se denominan *lugar geométrico*.

5 Matías y Agustín, con sus respectivas familias, viven en un lugar no urbanizado. En el esquema, sus casas están marcadas con una cruz. El hermano de uno de ellos, Tadeo, quiere mudarse por esa zona y decide instalarse en algún lugar que se encuentre a la misma distancia de Matías que de Agustín.

a. Reproduzcan el esquema en su carpeta y marquen tres puntos distintos donde podría ubicarse la casa de Tadeo.

b. ¿En cuántos lugares distintos se podría ubicar? ¿Por qué? Contesten en una hoja.

6 Este plano reproduce el centro de la ciudad de Mirasoles.



Resuelvan las consignas en una hoja.

a. Reproduzcan el plano de manera que 1 cm en la hoja represente 100 m en la ciudad.

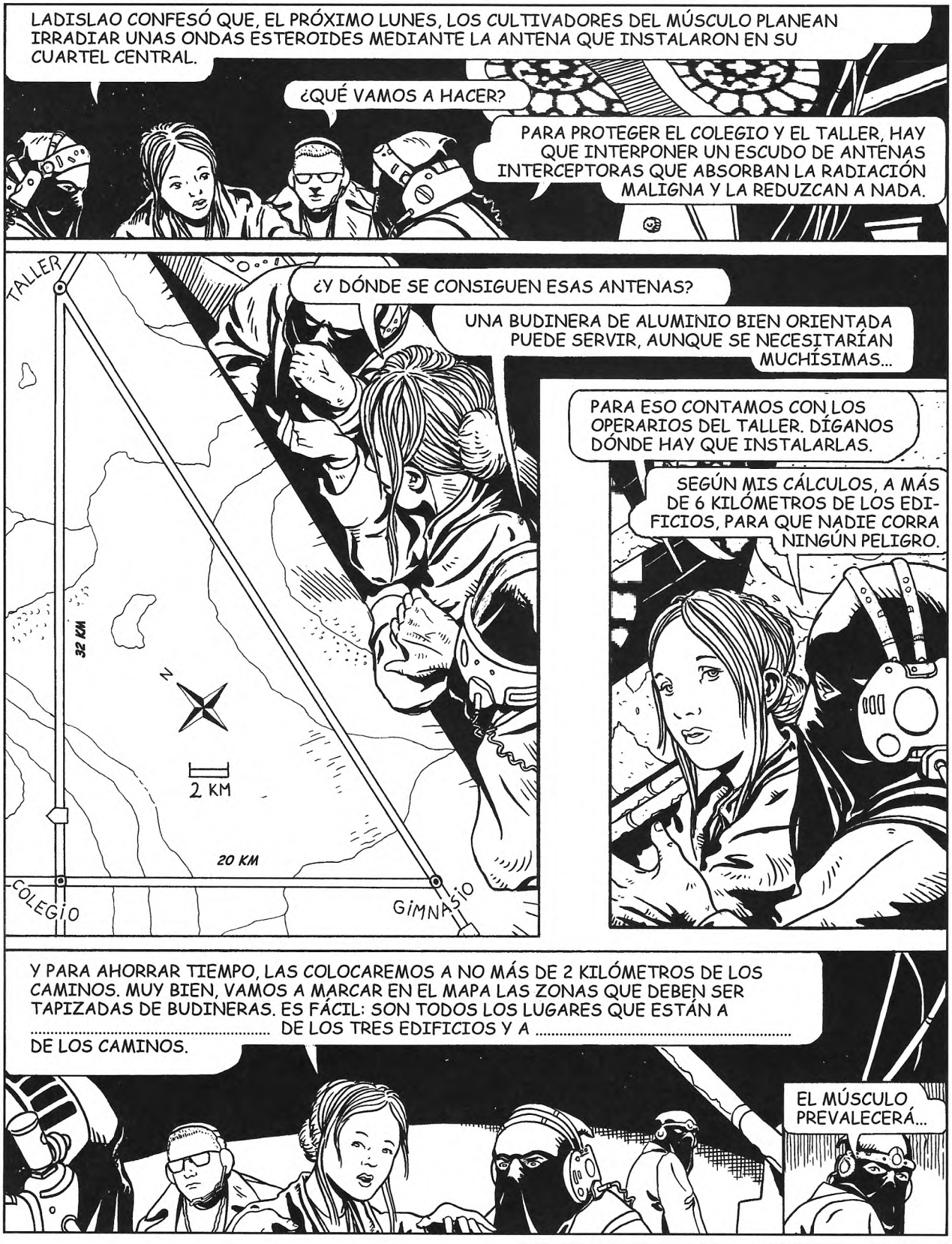
b. Indiquen los puntos que se encuentran a 200 metros de la intendencia.

c. Señalen el lugar geométrico de los puntos que están a más de 300 metros de la Av. del Campo.

d. ¿Qué puntos se encuentran a más de 200 m de la intendencia y del monumento?

EN LA CARPETA

II. Dibujen un plano que contenga el camino entre su casa y la escuela. Señalen algunos puntos importantes que se encuentren en el camino e indiquen a qué distancia se encuentran respecto de la escuela.


LADISLAO CONFESÓ QUE, EL PRÓXIMO LUNES, LOS CULTIVADORES DEL MÚSCULO PLANEAN IRRADIAR UNAS ONDAS ESTEROIDES MEDIANTE LA ANTENA QUE INSTALARON EN SU CUARTEL CENTRAL.
¿QUÉ VAMOS A HACER?
PARA PROTEGER EL COLEGIO Y EL TALLER, HAY QUE INTERPONER UN ESCUDO DE ANTENAS INTERCEPTORAS QUE ABSORBAN LA RADIACIÓN MALIGNA Y LA REDUZCAN A NADA.
TALLER
¿Y DÓNDE SE CONSIGUEN ESAS ANTENAS?
UNA BUDINERA DE ALUMINIO BIEN ORIENTADA PUEDE SERVIR, AUNQUE SE NECESITARÍAN MUCHÍSIMAS...
PARA ESO CONTAMOS CON LOS OPERARIOS DEL TALLER. DÍGANOS DÓNDE HAY QUE INSTALARLAS.
SEGÚN MIS CÁLCULOS, A MÁS DE 6 KILÓMETROS DE LOS EDIFICIOS, PARA QUE NADIE CORRA NINGÚN PELIGRO.
32 KM
N
2 KM
20 KM
COLEGIO
GIMNASIO
Y PARA AHORRAR TIEMPO, LAS COLOCAREMOS A NO MÁS DE 2 KILÓMETROS DE LOS CAMINOS. MUY BIEN, VAMOS A MARCAR EN EL MAPA LAS ZONAS QUE DEBEN SER TAPIZADAS DE BUDINERAS. ES FÁCIL: SON TODOS LOS LUGARES QUE ESTÁN A ..... DE LOS TRES EDIFICIOS Y A ..... DE LOS CAMINOS.
EL MÚSCULO PREVALECERÁ...

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

La circunferencia y el círculo tienen propiedades que permiten resolver diversos problemas, como la descripción de espacio, el diseño de objetos y la medición de distancias, entre otros.

8 Consideren el siguiente esquema y resuelvan **a.** y **b.** en una hoja

a. Tracen una circunferencia de centro A y 3 cm de radio, y otra de centro A y 5 cm de radio.
b. Definan el lugar geométrico comprendido entre ambas circunferencias.

9 **a.** Tracen una circunferencia.
b. Ubiquen un punto P que esté sobre ella.
c. Ubiquen otro punto, M, que también pertenezca a la circunferencia y que determine con P la cuerda MP.
d. Ubiquen un punto K sobre el arco MP tal que $\overline{PK}$ sea diámetro de la circunferencia.

EN LA CARPETA

III. Dibujen una circunferencia de centro O y tracen la cuerda AB. Tracen por B la perpendicular a la recta AB. Esa recta corta a la circunferencia en M. ¿Qué pueden decir de los puntos A, O y M?

10 **a.** Tracen una circunferencia de 2,5 cm de radio.

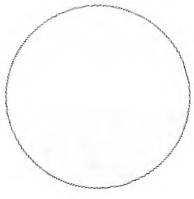
b. Tracen dos diámetros que sean perpendiculares entre sí.

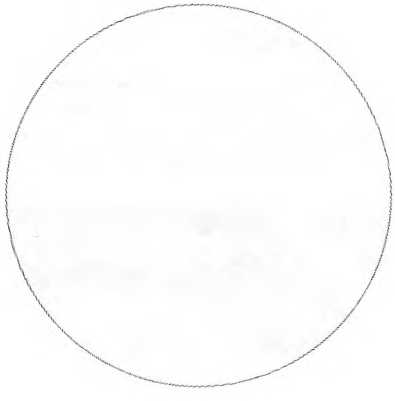
c. Marquen los cuatro puntos donde los diámetros cortan a la circunferencia.

d. Unan con segmentos los cuatro puntos. ¿Qué figura obtuvieron? La respuesta ¿es única?

SÍ	NO

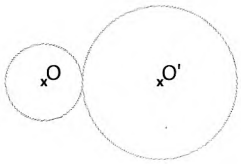
11 Dibujen en una hoja dos circunferencias del mismo radio que las que están a continuación.



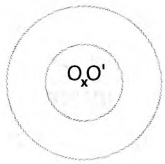


12 Cada uno de los esquemas con dos circunferencias que están a continuación representa un arreglo distinto de jardines. La zona sombreada es la destinada a las flores.

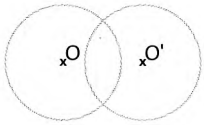
I.



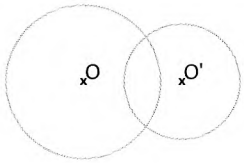
II.



III.



IV.



Describan* cada una de las zonas en una hoja utilizando las "distancias a los centros O y O'".

13 Resuelvan las siguientes consignas:

a. Marquen dos puntos cualesquiera y dibujen tres circunferencias que pasen por esos dos puntos:

b. ¿Cuántos puntos se pueden encontrar? ¿Cuál es el mayor radio que pueden tener las circunferencias? ¿Y el menor?

* **Claves para definir**
Las relaciones entre dos circunferencias permiten definir lugares geométricos. Quizá, si expliquen primero las condiciones que cumplen los puntos en cada caso, encuentren más fácilmente las respuestas.

EN LA CARPETA

IV. Escriban las conclusiones a las que arribaron en el punto b del ejercicio 13. ¿Coinciden con las conclusiones de otros compañeros?

14 ¿Por qué el compás es un instrumento eficaz para trazar circunferencias?

15 Dada una circunferencia, ¿cómo hacen para determinar su centro? Expliquen el procedimiento utilizado al resolver el problema **11**.

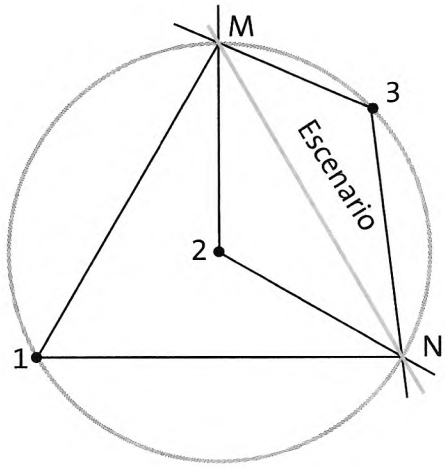
16 **a.** Construyan con regla no graduada y compás la circunferencia completa de la cual sólo se ve el siguiente arco:

b. Expliquen el procedimiento utilizado para realizar la construcción. Compartan el trabajo con otros compañeros y analicen los distintos procedimientos usados.

17 Si se construyen dos rectas A y B perpendiculares a una tercera recta, ¿qué relación tienen A y B entre sí?

18 El esquema corresponde a un anfiteatro. La cuerda MN lo divide en dos zonas: el escenario y la platea. Se han colocado los siguientes reflectores:

- El 1 en el contorno de la platea.
- El 2 en el centro del anfiteatro.
- El 3 en el contorno del escenario.



Coloreen la parte del anfiteatro iluminada de manera simultánea por los reflectores:

a. 1 y 2. **b.** 1 y 3. **c.** 2 y 3. **d.** 1, 2 y 3.

19 En una hoja, ubiquen siete puntos, A, B, C, D, E, F y G, en una circunferencia.

a. Tracen los segmentos uniendo cada punto con el siguiente a su consecutivo, o sea, A con C, B con D y así sucesivamente. Obtienen una figura estrellada.

b. Si los unen de tres en tres, ¿cómo denominarían a la figura así obtenida?

c. Si miden con un transportador los ángulos de la primera figura, la suma es aproximadamente de 540º. En el segundo caso, la suma de los ángulos da aproximadamente 180º. ¿Por qué es así? Expliquen su respuesta.

EN LA CARPETA

V. Dada una circunferencia cualquiera:
a) Elijan dos puntos A y B interiores a ella.
b) Construyan una circunferencia concéntrica con la anterior que pase por A y B.
c)¿Cómo ubicarían los puntos A y B para que no se pueda construir una nueva circunferencia?

20 Construyan un semicírculo de diámetro AB y marquen sobre el arco un punto P. Consideren el triángulo APB: ¿de qué clase es? Expliquen su respuesta.

MEDIATRIZ Y BISECTRIZ

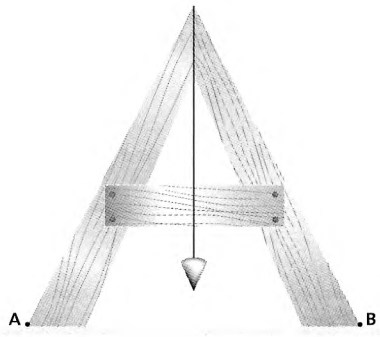
No todos los lugares geométricos están relacionados con las nociones de círculo y circunferencia. Existen otros conjuntos de puntos que cumplen condiciones especiales. Tal es el caso de los que pertenecen a la mediatriz de un segmento y a la bisectriz de un ángulo.

21 Tienen que realizar el siguiente desafío: ubicar 7 monedas que equidisten de dos varillas rectas; éstas pueden cortarse o no. Expliquen sus conclusiones.

22 **a.** En una hoja lisa, dibujen a pulso un segmento AB. Ubiquen puntos que estén a igual distancia de A que de B.

b. ¿Qué condiciones cumplen esos puntos? ¿Por qué?

23 Los albañiles utilizan un instrumento que sirve para verificar si dos puntos se encuentran sobre la misma horizontal. Existen distintos tipos de niveles. El más común está compuesto por un triángulo isósceles de madera, de cuyo vértice superior se suspende una plomada.



a. Si el instrumento se encuentra sobre una superficie plana, ¿por qué punto del segmento AB pasa el hilo de la plomada? Expliquen su respuesta.

b. Si en lugar de tratarse de un triángulo isósceles se trata de cualquier triángulo, ¿sucede lo mismo? ¿Por qué?

SÍ	NO

EN LA CARPETA

VI. Dibujen un ángulo agudo, uno recto y uno obtuso. Tracen la mediatriz de cada uno y expliquen el procedimiento que emplearon para hacerlo.

24 Tracen con regla no graduada y compás la mediatriz del segmento AB.

A ⊢——————————⊣ B

25 La recta m es la mediatriz del segmento CD. Dibujen el punto D.

m

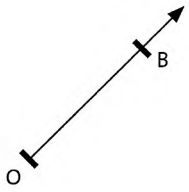
C x

Lean el apartado "Mediatriz de un segmento", que comienza en la página 190 del Anexo teórico, y revisen los problemas 22 a 25.

26 ¿Por qué al trazar la mediatriz de un segmento AB el radio del arco debe ser mayor que la mitad de $\overline{AB}$?

27 Tracen dos segmentos cualesquiera y construyan, con regla no graduada y compás, la mediatriz de cada uno de ellos.

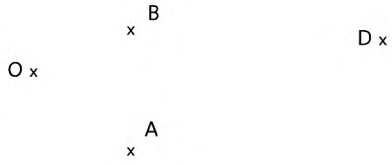
28 $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz* ¿de qué ángulo? Trácenlo.



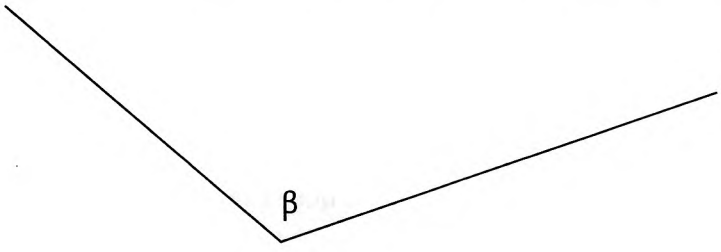
¿La respuesta es única? ¿Por qué?

SÍ	NO

29 Los puntos O y B pertenecen a la bisectriz de un ángulo, y A y D son puntos de uno de sus lados. Dibujen el ángulo.



30 Tracen con regla y compás un ángulo cuya amplitud sea la cuarta parte de la de $\hat{\beta}$.

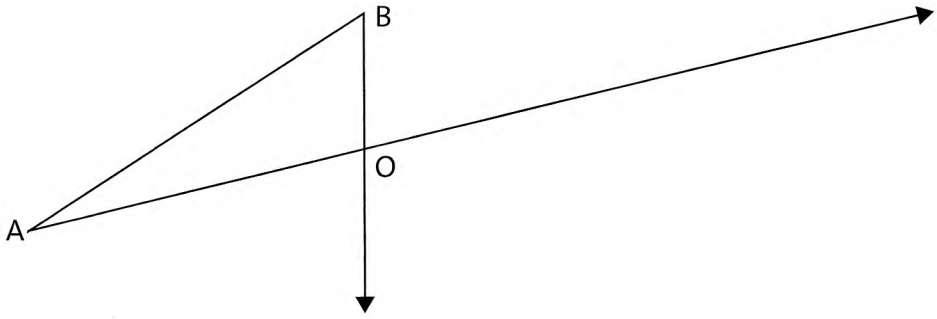


* **Más claves para definir**
Circunferencia, mediatriz y bisectriz son nociones que sirven para definir distintos lugares geométricos. Es útil tener en cuenta cuál es la condición de los puntos que pertenecen a cada uno para resolver los problemas.

EN LA CARPETA

VII. Expliquen los conceptos de bisectriz y mediatriz en función de los ejercicios realizados.

31 Dibujen un triángulo ABC sabiendo que $\overrightarrow{AO}$ es bisectriz de $B\hat{A}C$ y $\overrightarrow{BO}$ es bisectriz de $A\hat{B}C$.



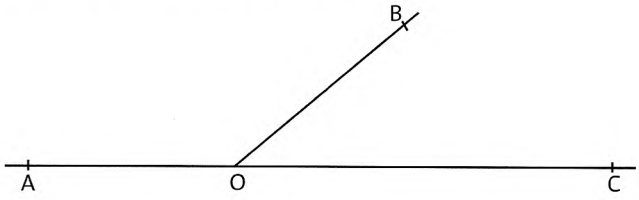
La construcción ¿es única? ¿Por qué?

SÍ	NO

32 Discutan la validez de la siguiente afirmación:
"En todo triángulo isósceles, la altura correspondiente al lado desigual está incluida en la bisectriz del ángulo opuesto y en la mediatriz de dicho lado".
Expliquen sus conclusiones.

33 En pequeños grupos, escriban tres afirmaciones que se refieran a bisectrices y mediatrices. Pueden ser específicas de triángulos isósceles, rectángulos o equiláteros. Deben producir por lo menos una que sea falsa. Tienen que saber justificar todas. Realicen el trabajo en una hoja aparte.

34 Dos ángulos adyacentes son aquellos que comparten un lado en común y cuya suma es un ángulo llano. Los ángulos AOB y BOC son adyacentes.



a. En la figura, tracen las bisectrices de los ángulos AOB y BOC.

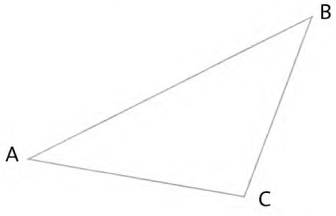
b. ¿Es cierto que las bisectrices de los ángulos AOB y BOC son perpendiculares entre sí? ¿Por qué?

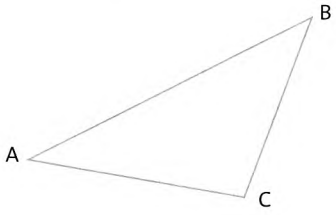
SÍ	NO

c. Las conclusiones del ítem **b.** ¿son válidas para cualquier par de ángulos adyacentes? ¿Por qué?

SÍ	NO

35 Consideren el triángulo ABC y su congruente.





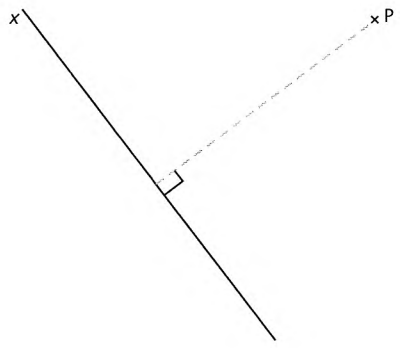
a. En el primer triángulo, tracen las mediatrices de dos de sus lados y construyan una circunferencia circunscripta, es decir, que contiene a los tres vértices del triángulo.

b. En el segundo triángulo, tracen las bisectrices de sus ángulos y construyan la circunferencia inscripta, es decir, la mayor circunferencia que está incluida en él.

36 Consideren una recta *x* y un punto P, situado a 3 cm de *x*.

a. Marquen sobre la recta *x* un punto A y determinen el punto medio de $\overline{AP}$.

b. Repitan este procedimiento con otros puntos de *x*: B, C y D.



c. Consideren todos los puntos de la recta *x*. ¿Qué figura forman los puntos medios de los segmentos con uno de sus extremos en esos puntos y con el otro extremo en P? ¿Por qué?

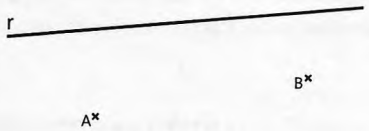
En las páginas 189 a 192 del Anexo teórico, se encuentra el apartado "Lugar geométrico". Léanlo

37 **a.** Expliquen a un compañero las condiciones que cumplen los puntos de los distintos lugares geométricos.

b. Definan la esfera usando la idea de lugar geométrico.

1 | EJERCITACIÓN

38 Dibujen el triángulo isósceles ABC, tal que $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ midan lo mismo y el vértice C se encuentre sobre la recta *r*.



39 **a.** Construyan un paralelogramo y tracen la mediatriz de cada uno de sus lados.
b. ¿Qué relación guardan entre sí?

40 **a.** Construyan un triángulo rectángulo ABC. Tracen la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo.
b. ¿Qué nombre recibe la circunferencia?

2 | MÁS PROBLEMAS

41 **a.** Dibujen una circunferencia de 4 cm de radio. Marquen en ella un punto fijo P. Consideren otro punto de la circunferencia y llamen K_1 al punto medio entre P y A.
b. Repitan este procedimiento con otros puntos de la circunferencia: B, C, D, etcétera. ¿Cuál es la condición que cumplen los puntos K_1, K_2, K_3?

42 Teniendo en cuenta el siguiente dibujo:

encuentren el lugar geométrico de los puntos que cumplen lo siguiente:
- Pertenecen a la recta *r* y están a 2,5 cm de O.
- Pertenecen al plano de la hoja y están a 2,5 cm de O.
- Pertenecen al espacio y están a 2,5 cm de O.

43 ¿Cuáles de los siguientes elementos sirven para determinar un plano? ¿Cuáles no? ¿Por qué?
a. Una recta y un punto exterior.
b. Dos rectas que se cortan en un punto.
c. Dos rectas sin puntos comunes.

44 ¿Cuántos puntos en común pueden tener un plano y una recta que no está en él? ¿Por qué?

45 ¿Cuántas rectas pasan por un punto en el espacio? ¿Cuántas que estén en un plano que contiene al punto? ¿Cuántos planos pasan por una recta? ¿Y por un punto?

46 Discutan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no. Expliquen sus conclusiones.
- La bisectriz de un ángulo de un triángulo corta al lado opuesto en su punto medio.
- Los puntos que se encuentran sobre la bisectriz de un ángulo de un triángulo se encuentran a la misma distancia de los dos lados del ángulo.
- Si la mediana correspondiente a un lado de un triángulo es también mediatriz de dicho lado, el triángulo es isósceles.
- Si la altura correspondiente a un lado de un triángulo es bisectriz del ángulo opuesto, entonces, el triángulo es isósceles.

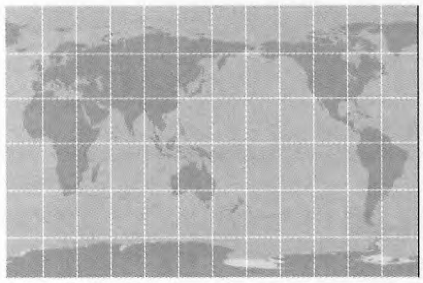
3 | PROBLEMAS PARA REPASAR

47 Seguro que escucharon hablar sobre el ecuador, los polos, los meridianos y los paralelos. Para analizar la ubicación de puntos en la superficie esférica de la Tierra, se puede comenzar por determinar algunas de las propiedades de los círculos máximos en las esferas y las características de la red geográfica a partir del uso de una pelota. Se usa una pelota como modelo, pero recordemos que nuestro planeta está achatado en los polos: sólo es para tener una idea aproximada, un elemento que nos permita representarla.

a. Imaginen un plano que corta a la esfera por el centro dividiéndola en dos partes iguales. ¿Qué figura queda determinada por la intersección entre el plano y la esfera?
b. Imaginen otro plano que corta a la esfera sin pasar por el centro. ¿Cómo es ahora la figura? ¿Qué tiene de similar y cuál es la diferencia con el caso anterior?

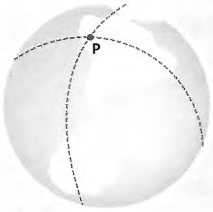
48 **a.** Determinen cuáles son los círculos máximos del globo terráqueo y de la pelota dibujados en el problema **47**.
b. ¿Cuántos círculos máximos pueden dibujar sobre la esfera? ¿Qué propiedad tienen en común?
c. Dibujen dos círculos máximos y observen cómo cada uno de ellos divide al otro en dos semicírculos. ¿Cómo serán sus longitudes?

49 La red geográfica que usamos para ubicar puntos sobre la esfera terrestre se basa en un cuadriculado de líneas imaginarias que tiene a los polos como puntos de referencia.



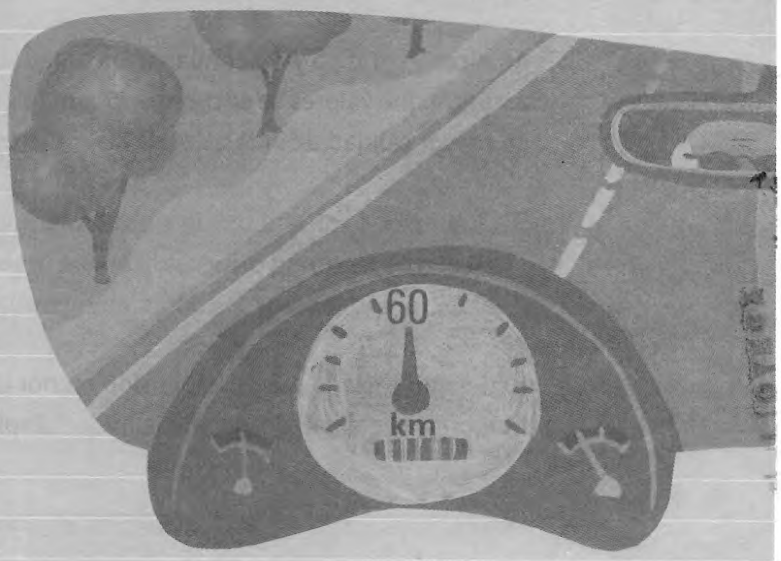
a. Marquen sobre la pelota que aparece en la columna siguiente las líneas correspondientes al ecuador, al polo norte y al polo sur. Pueden utilizar un globo terráqueo como referencia.
b. Designen cuál será el meridiano de 0º y dibujen 10 meridianos más teniendo presente que son semicírculos máximos que tienen a los polos como extremos, dos meridianos opuestos forman un círculo máximo que pasa por los polos y se puede dibujar un gran número de meridianos.

50 **a.** Si queremos indicar con precisión un punto P sobre la esfera, usamos los paralelos y meridianos ¿de qué forma?



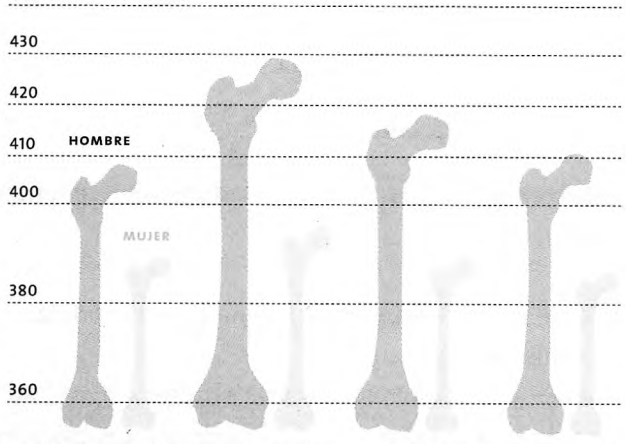
b. Averigüen qué es la latitud y la longitud y cuáles son las convenciones utilizados en todo el mundo.

51 Para medir distancias sobre una superficie curva, como la esfera, resuelvan **a.** y **b.**
a. Marquen sobre una esfera dos puntos cualesquiera. Tracen un círculo máximo que pase por ambos y midan la distancia entre los dos puntos sobre el círculo máximo.
b. ¿Existe un camino más corto? ¿Por qué?
c. Calculen en grados la distancia entre los dos puntos. Para esto, deben relacionar los grados asociados a un círculo (360º) con los centímetros que midieron.



T. P. 8 | Relaciones entre datos

1 La región de San Pedro de Atacama, ubicada al norte de Chile, es internacionalmente conocida como una de las principales regiones arqueológicas de América del Sur. Hoy se dispone de resultados de investigaciones acerca del tamaño del fémur de los seres humanos en distintos períodos históricos, que se presentan en el siguiente gráfico.



TAMAÑO MEDIO DEL FÉMUR (EN MILÍMETROS) EN LA POBLACIÓN DE SAN PEDRO DE ATACAMA EN LOS CUATRO PERÍODOS ESTUDIADOS.

El tamaño del fémur se utiliza para estimar la altura de los individuos: las personas más altas tienen el fémur más grande. También se ha investigado que a mayor altura media de una población, corresponde mayor calidad de vida.

EN LA CARPETA

I. Busquen en Internet o en enciclopedias y resuman la explicación de alguna fuente que justifique la relación entre el tamaño del fémur y la altura de las personas.

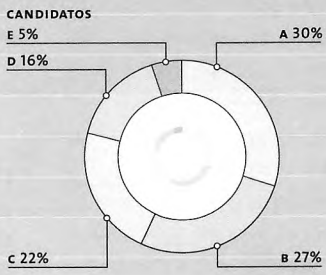
Analicen el gráfico y respondan a las preguntas de **a.** y **b.**

a. ¿Entre qué valores se encuentra el tamaño del fémur de los hombres en el período de mayor calidad de vida? ¿Y el de las mujeres? Expliquen cómo lo pensaron.

b. ¿En qué período puede haber sido menor la diferencia entre la calidad de vida del hombre y la calidad de vida de la mujer? Expliquen por qué.

2 **a.** Analicen los siguientes gráficos, que muestran los resultados de tres encuestas referidas a la intención de voto para una elección, realizadas por consultoras diferentes. A partir de esta información, resuelvan en una hoja los ítem **b.**, **c.** y **d.**

CANDIDATO	Nº DE PERSONAS
A	540
B	455
C	255
D	250
E	200



b. Si alguien dice: "Fueron encuestadas 1800 personas", ¿puede ser que se refiera a alguna de esas encuestas? Expliquen por qué.

c. Si otra persona dice: "El 15% de los encuestados se inclina por el candidato C", ¿qué encuesta habrá leído? Expliquen por qué.

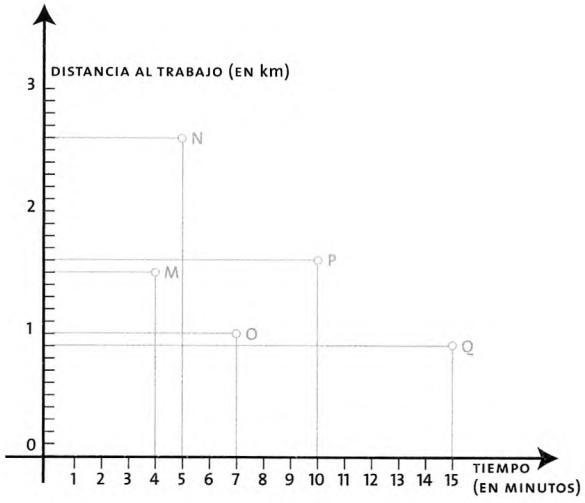
d. En diarios, revistas y libros, busquen información presentada de diferentes modos. En una hoja, formulen preguntas que se puedan responder con los datos que tienen e intercámbienlas con sus compañeros para responderlas.

DATOS Y REPRESENTACIONES

Para estudiar relaciones entre datos, se usan representaciones de diverso tipo. Es importante elegir la más adecuada en función del problema por resolver.

3 Dibujen en una hoja un cuadrado y marquen un punto interior a esa figura. Escriban un mensaje para que un compañero pueda ubicar otro punto en un cuadrado de igual tamaño, de modo tal que al superponer ambos cuadrados coincidan los puntos.

4 Rosa, José, Roberto, Guillermo y Alicia van al trabajo por la misma ruta. En el plano, se han representado la ruta, el trabajo y las viviendas de esas personas.



Rosa va en auto; José, en bicicleta y Roberto, caminando. El lunes pasado, todos fueron al trabajo sin desviarse ni detenerse. En el gráfico de la derecha, se ha representado, en el eje horizontal, el tiempo que tardó cada uno y, en el vertical, la distancia de la casa de cada una de las personas al trabajo.

EN LA CARPETA

II. Investiguen en diarios y libros escolares, diferentes modos de representar la relación entre datos. Grafiquen algunos ejemplos hallados.

a. Indiquen qué punto de la gráfica corresponde a cada persona.

M N O

P Q

b. ¿Cómo pueden haber ido ese día Guillermo y Alicia?

c. Conversen con un compañero sobre cómo pensaron las respuestas **a.** y **b.**

Lean el apartado "Representación de puntos en el plano" en la página 207 del Anexo teórico.

5 **a.** Comparen las maneras de representar puntos en el plano con las que utilizaron para resolver los problemas anteriores.

b. Indiquen cuál es la ordenada de un punto cualquiera del eje de las abscisas y cuál es la abscisa de un punto cualquiera del eje de las ordenadas. Expliquen por qué en una hoja.

6 **a.** Completen las coordenadas de los puntos B y D para que la figura ABCD sea un cuadrado.

A (3; 7) B (3; 4) C (_ ; _) D (_ ; _)

b. Completen las coordenadas de los puntos C y D para que ABCD sea un rectángulo.

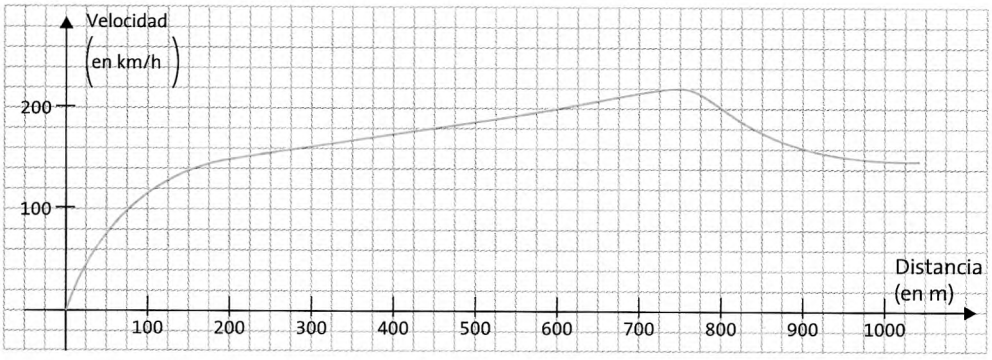
A (3; 5) B (1; 3) C (_ ; _) D (_ ; _)

c. Expliquen en una hoja cómo pensaron para realizar lo pedido en **a.** y **b.**, y discutan sus propuestas con un compañero.

d. Escriban las coordenadas de los vértices de un rombo.

P Q R S

7 Un corredor de carreras prueba un auto en línea recta. Analicen el gráfico para obtener lo pedido en los ítem **a.**, **b.** y **c.**



a. ¿Qué significa que el punto de coordenadas (200; 150) esté ubicado en la gráfica?

b. Indiquen lo siguiente:

- La velocidad que alcanza el auto a los 600 m del punto de partida.

- La distancia al punto de partida en la que alcanza una velocidad de 140 km/h.

- La distancia al punto de partida en la que alcanza la mayor velocidad.

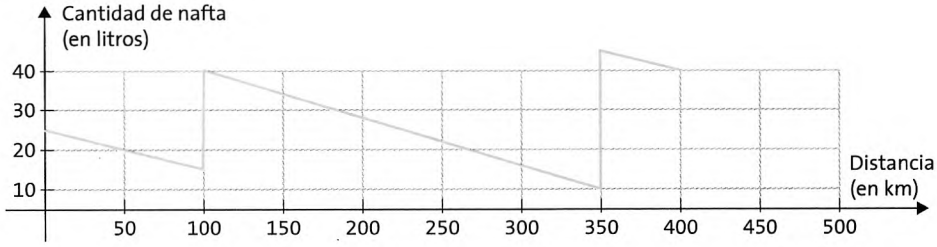
c. ¿Puede ser que el auto haya tenido un desperfecto? ¿Por qué?

SÍ	NO

EN LA CARPETA

III. Realicen un gráfico para otro corredor que alcance una velocidad de 180 km/h a los 300 m; su velocidad máxima sea de 220 km/h a los 700 m; y mantenga esa velocidad hasta los 1000 m.

8 La siguiente gráfica representa la cantidad de nafta que hay en el tanque de un auto a lo largo de un viaje de 400 km.



a. ¿Cuántos litros tenía el tanque del auto a la salida? ¿Y a la llegada?

A LA SALIDA:		A LA LLEGADA:	

b. ¿En qué kilómetro se encontraba el auto cuando tenía 10 litros? ¿Y cuándo tenía 40 litros?

c. ¿Cargó nafta a lo largo del viaje? Si es así, ¿cuántas veces lo hizo y cuántos litros cargó, aproximadamente?

SÍ	NO

d. Si al hacer una pregunta acerca de la información que se puede obtener a partir de este gráfico alguien responde: "20 litros", ¿qué pregunta le habrán hecho? ¿Hay una sola pregunta posible? Justifiquen sus respuestas.

PREGUNTA:

SÍ	NO

Lean, en la página 208 del Anexo teórico, el apartado "Gráficas cartesianas y tablas de valores" para resolver el problema **9**.

9 **a.** A partir del gráfico del problema **1**, si se sabe en qué kilómetro estaba el auto y se quiere saber qué velocidad tenía, ¿es posible responder con un único valor ?

SÍ	NO

b. A partir del gráfico del problema **2**, si se sabe en qué kilómetro estaba el auto y se quiere saber cuántos litros de nafta tenía el tanque, ¿es posible responder con un único valor?

SÍ	NO

c. Para los problemas **7** y **8**, propongan otras preguntas en una hoja aparte y analicen las respuestas.

10 El domingo pasado, una familia fue a pasar el día al parque. Durante la ida, no tuvieron problema, pero a la vuelta demoraron mucho por la cantidad de autos que circulaba por el camino. En los siguientes gráficos, se ha representado la distancia a la que estaba la familia respecto de su casa y el tiempo que tardaron en realizar el viaje:

GRÁFICO 1

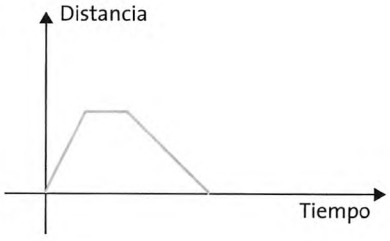
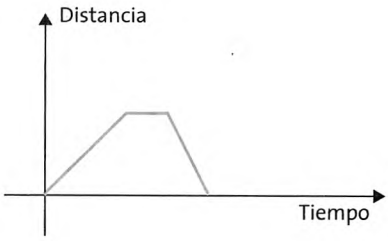


GRÁFICO 2



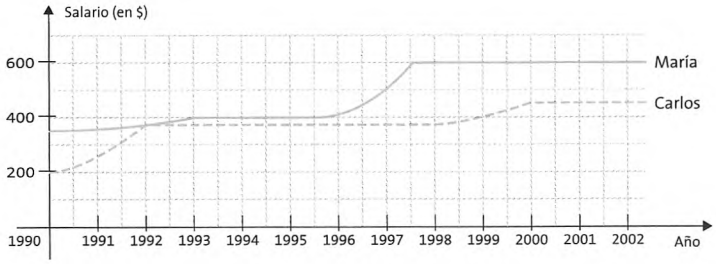
Indiquen cuál de ellos representa la situación descripta y expliquen por qué.

GRÁFICO 1	SÍ	NO	GRÁFICO 2	SÍ	NO

EN LA CARPETA

IV. Inventen una situación que pueda representarse con el gráfico que no corresponde a la descripción del ejercicio número 10.

11 En el siguiente gráfico, se han representado los salarios de María y de Carlos en los últimos años. Respondan a las preguntas en una hoja aparte.



a. ¿Cuál era el salario de María en el año 1999? ¿Y el de Carlos?
b. ¿Cuál fue el aumento de salario de María entre los años 1990 y 1993?
c. ¿En qué período Carlos aumentó más rápidamente su salario? ¿Y María?
d. Determinen en qué año o años ocurrió lo siguiente:

MARÍA GANABA $400	CARLOS GANABA $300	GANABAN LO MISMO	MARÍA GANABA MÁS DE $500

Si lo necesitan, lean el apartado "Gráficas cartesianas y tablas de valores", en la página 208 del Anexo teórico, y resuelvan el problema **12** utilizando una gráfica adecuada.

12 La pulidora A cobra $7 el m^2 de piso para pulirlo y encerarlo. Para hacer el mismo trabajo, la pulidora B cobra una suma fija de $52 más $5 por m^2.

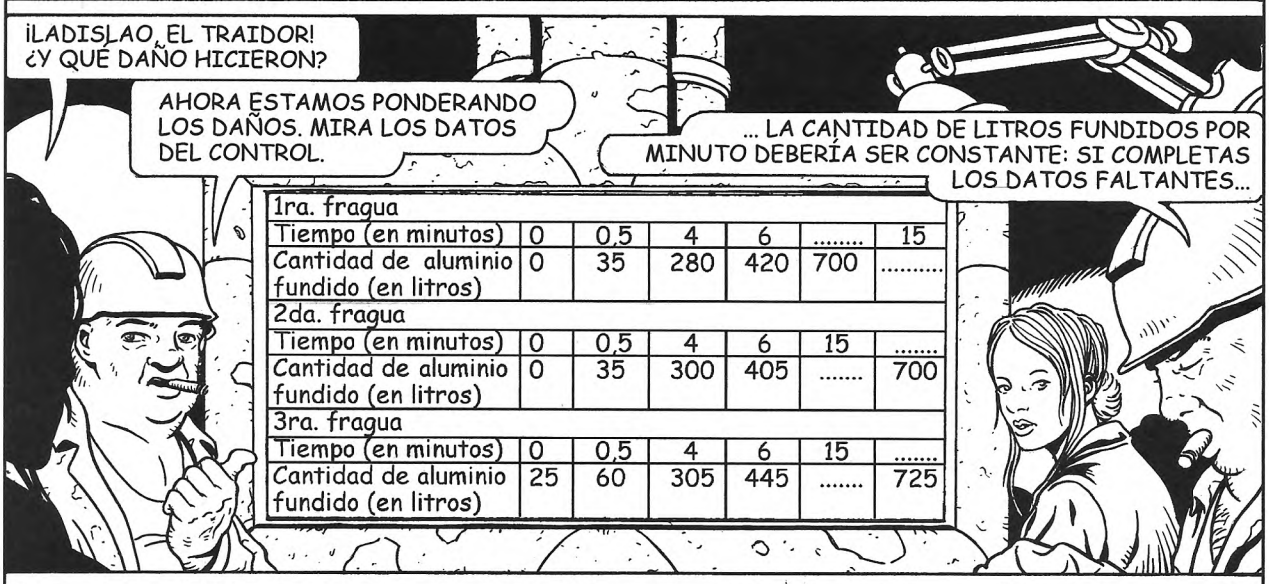
a. María contrató a la pulidora A y Patricia, a la pulidora B. Si las dos gastaron lo mismo, ¿cuántos m^2 pulió cada una?

MARÍA PULIÓ		PATRICIA PULIÓ	

b. ¿En qué casos conviene contratar a la pulidora A? Expliquen por qué en una hoja aparte.

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD

Aunque ya han resuelto problemas de proporcionalidad, se puede dar una nueva mirada sobre ellos considerando la variabilidad de las cantidades involucradas.



1ra. fragua						
Tiempo (en minutos)	0	0,5	4	6	.....	15
Cantidad de aluminio fundido (en litros)	0	35	280	420	700	.....
2da. fragua						
Tiempo (en minutos)	0	0,5	4	6	15	.....
Cantidad de aluminio fundido (en litros)	0	35	300	405	.....	700
3ra. fragua						
Tiempo (en minutos)	0	0,5	4	6	15	.....
Cantidad de aluminio fundido (en litros)	25	60	305	445	.....	725

Lean los apartados "Funciones de proporcionalidad directa" y "Funciones de proporcionalidad inversa", que comienzan en las páginas 213 y 216, respectivamente, del Anexo teórico.

14 Analicen los problemas **12** y **13** e identifiquen, si es posible, cuáles son funciones de proporcionalidad directa o inversa.

PROBLEMA 12	PULIDORA A		PULIDORA B	

PROBLEMA 13	BOMBA 1		BOMBA 2		BOMBA 3	

15 **a.** Completen las siguientes tablas cuando sea posible:

	TABLA 1: REPRODUCCIÓN DE UNA BACTERIA					
TIEMPO DE CULTIVO (EN h): x	0	1	2	4	_____	7
CANTIDAD DE BACTERIAS: y	1	2	4	_____	64	_____

	TABLA 2: DESCUENTO REALIZADO EN UN NEGOCIO					
PRECIO (EN PESOS): x	12	25	85	_____	500	750
DESCUENTO (EN PESOS): y	0,6	1,25	_____	5,4	_____	37,5

	TABLA 3: PRECIO DE SUSCRIPCIÓN A UNA REVISTA					
DURACIÓN (EN MESES): x	3	4	6	_____	9	12
PRECIO (EN PESOS): y	7,5	10	12,5	17,5	20	_____

	TABLA 4: PRECIO DE ALQUILER DE UN COLECTIVO					
CANTIDAD DE PERSONAS: x	1	4	6	11	_____	45
PRECIO (EN PESOS): y	_____	75	50	_____	5,5	_____

b. Indiquen cuáles de la tablas de **a.** corresponden a una situación de proporcionalidad y de qué tipo. Intercambien argumentos con sus compañeros.

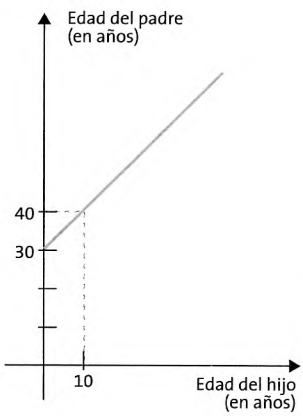
TABLA 1		TABLA 2	
TABLA 3		TABLA 4	

c. Analicen las siguientes fórmulas e indiquen cuál o cuáles de ellas se corresponden con alguna de las tablas presentadas en **a.** y con cuál en cada caso.

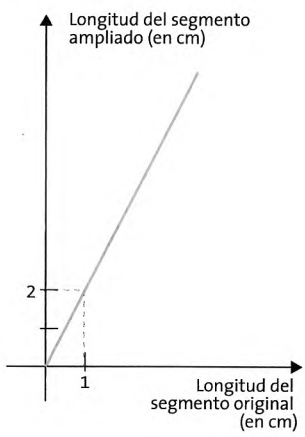
▪ $y = \frac{0{,}05}{x}$	▪ $y = 0{,}05 \cdot x$	▪ $y = 300 \cdot x$	▪ $y = 2 \cdot x$	▪ $y = \frac{x}{2}$	▪ $y = \frac{300}{x}$

16 **a.** Identifiquen cuál o cuáles de las siguientes gráficas corresponde a una situación de proporcionalidad* e indiquen si la proporcionalidad es directa o inversa.

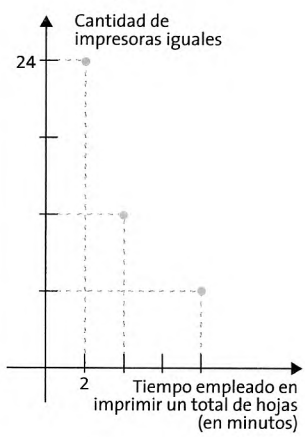
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



b. Si tuviesen que representar las situaciones de proporcionalidad que identificaron con una calculadora gráfica, ¿qué fórmula ingresarían en cada caso?

GRÁFICA 1:

GRÁFICA 2:

GRÁFICA 3:

* **Determinar una relación de proporcionalidad**

Para determinar si una relación entre cantidades es de proporcionalidad directa o inversa, es necesario tener en cuenta que no basta con que ambas cantidades aumenten o que una aumente y otra disminuya. Además, hay que tener en cuenta las propiedades de estas relaciones para evitar cometer errores derivados de reglas como ésas.

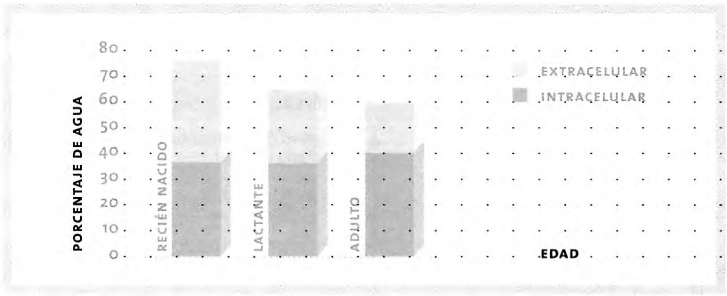
EN LA CARPETA

V. Redacten tres situaciones que se representen con los tres gráficos del ejercicio número 16.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Gran parte de la información que brindan los medios gráficos se presenta utilizando gráficos estadísticos. Es importante analizarlos detenidamente y reflexionar acerca de los distintos usos que pueden hacerse de la información presentada.

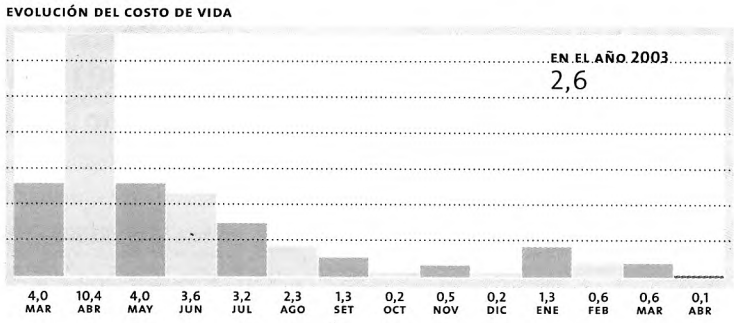
17 En el siguiente gráfico, se representa la distribución de agua en el cuerpo de un individuo a medida que aumenta la edad.



a. ¿Cuál de los valores parciales incide en la disminución del agua corporal en los individuos a medida que aumenta la edad?

b. Construyan dos gráficos de barras para representar por separado la evolución de la cantidad de agua extracelular e intracelular a medida que aumenta la edad.

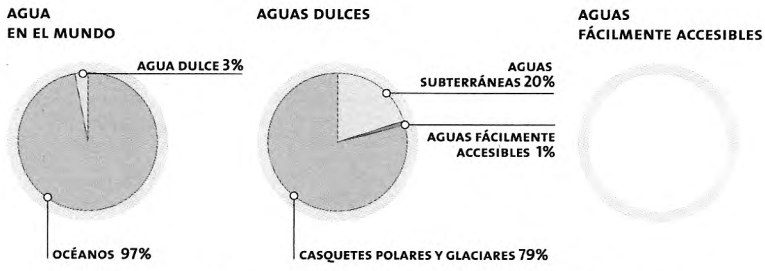
18 En el gráfico de la página siguiente, se ha representado la evolución del costo de vida en relación con el mes anterior en el período marzo 2002-abril 2003.



Pedro considera que el gráfico es incorrecto pues, en su casa, con el mismo nivel de consumo, gastaron más en abril de 2003 que en marzo de ese año. ¿Están de acuerdo con Pedro? Escriban su respuesta en una hoja.

Si lo necesitan, lean el apartado "Porcentaje" en la página 169 del Anexo teórico.

19 Resuelvan el siguiente problema en una hoja aparte:



a. Sabiendo que el agua fácilmente accesible se distribuye del siguiente modo: el vapor atmosférico representa el 8%; la humedad del suelo, el 38%; el agua en organismos vivos, el 1% y el agua de los ríos, el 1%, completen el tercer gráfico*.

b. Si en el primer gráfico se quiere representar el agua de los ríos, ¿qué fracción se debería representar? ¿Resultaría un gráfico adecuado? Expliquen por qué.

* **Interpretación de gráficos**

Para representar datos en una gráfica estadística, es importante tener en cuenta qué tipo de gráfica conviene elegir en función de la información que se quiere representar.

EN LA CARPETA

VI. Describan dos tipos de información que representarían en un gráfico de barra y dos que representarían en un gráfico circular.

20 Dos diarios que compiten entre sí quieren publicitar un aviso. A partir de una encuesta, saben que en los últimos días los lectores están muy interesados en la sección de política. A continuación, se indica el número de páginas y cómo se distribuyen las secciones.

DIARIO 1 | 36 PÁGINAS	DIARIO 2 | 56 PÁGINAS
$\frac{1}{3}$ de páginas de política.	$\frac{1}{4}$ de páginas de política.
$\frac{1}{4}$ de páginas de información general.	$\frac{1}{4}$ de páginas de información general.
$\frac{1}{6}$ de páginas de espectáculos.	$\frac{1}{8}$ de páginas de espectáculos.
$\frac{1}{12}$ de páginas de economía.	$\frac{1}{8}$ de páginas de economía.
$\frac{1}{6}$ de páginas de publicidad.	$\frac{1}{4}$ de páginas de publicidad.

Elijan los datos que le conviene utilizar a cada diario para publicitarse y, en cada caso, representen dichos datos en una gráfica adecuada.

DIARIO 1	DIARIO 2

1 | EJERCITACIÓN

21 Si lo necesitan, lean el apartado "Circunferencia y círculo", que empieza en la página 55 del Anexo teórico, para realizar lo que se indica en los ítem **a.**, **b.** y **c.**

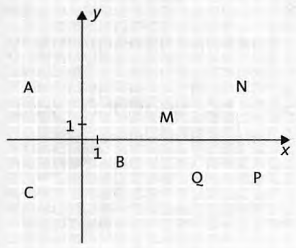
a. Ubiquen los puntos A (1;3) y B (7; 1) en un sistema de ejes perpendiculares.

b. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia de diámetro AB?

c. Escriban las coordenadas de otros puntos pertenecientes a la circunferencia.

d. Escriban las coordenadas de dos puntos interiores a la circunferencia y de dos puntos exteriores a ella.

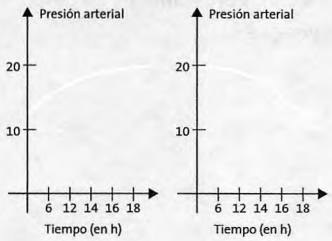
22 Escriban las coordenadas de esto:



a. Los vértices de las siguientes figuras.

b. Los vértices de las figuras simétricas a las anteriores respecto del eje *y*.

23 ¿Cuál de las siguientes gráficas da cuenta de una evolución favorable en un paciente? Expliquen por qué.



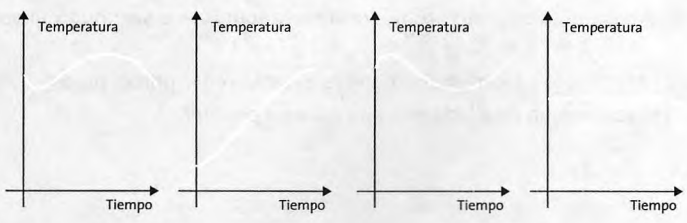
24 En el siguiente gráfico, se han representado los cuatro productos que más aumentaron en el período diciembre 2001-abril 2003.

a. En diciembre de 2001, la harina de trigo común costaba $0,40. ¿Cuál habrá sido el precio en abril de 2003?

b. Si en abril de 2003 el pollo costaba $3,90, ¿cuánto costaba en abril de 2001?

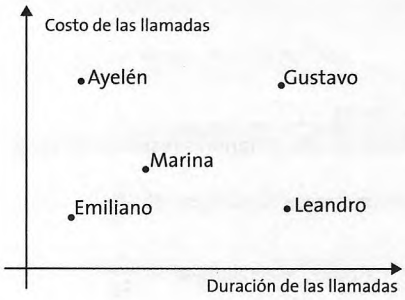
2 | MÁS PROBLEMAS

25 Las siguientes gráficas representan la variación de temperatura máxima, en grados centígrados, a lo largo de un año.



a. Para cada una de las gráficas, expliquen la evolución de la temperatura a lo largo del año.
b. ¿Piensan que todas las gráficas pueden referirse a un lugar determinado? Expliquen por qué.
c. ¿Cuáles de ellas corresponden a lugares situados diametralmente opuestos? Expliquen por qué.

26 Un fin de semana, cinco personas realizaron llamadas telefónicas a varios lugares del país. El costo de sus llamadas y la duración del tiempo de éstas está reflejado en el gráfico. Analícenlo y, teniendo en cuenta que el costo es proporcional a la duración, respondan a las preguntas.



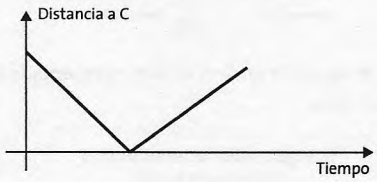
a. ¿Quién hizo la llamada a la ciudad más lejana? ¿Por qué?
b. ¿Quién hizo la llamada a la ciudad más cercana? ¿Por qué?
c. ¿Puede ser que alguien haya realizado una llamada local? En ese caso, ¿quién o quiénes podrían ser?
d. Copien la gráfica y marquen otros puntos que representen llamadas locales de diversa duración.
e. ¿Cómo representarían todas las posibles llamadas locales realizadas durante un fin de semana?

3 | PROBLEMAS PARA REPASAR

27 En el siguiente gráfico, se ha representado el peso de María y el de Paula en los últimos años.

Si se sabe que en los últimos años María bajó más bruscamente de peso, ¿qué curva corresponde a cada una? Expliquen por qué.

28 Un auto avanza por un camino recto, sale de la ciudad A y finaliza el viaje en la ciudad B. Las ciudades A y B están en un camino en el que también se encuentra la ciudad C.
En el siguiente gráfico, se representa la distancia a la ciudad C, a la que se encuentra el auto en cada instante durante todo el tiempo que dura el recorrido.



29 ¿Puede ser que la ciudad C se encuentre en la mitad del camino?
Lean el apartado "Fórmulas" en las páginas 77 y 78 del Anexo teórico, para realizar lo que se establece en los ítem **a.** y **b.**
a. Indiquen cuáles de las siguientes relaciones corresponden a relaciones de proporcionalidad e identifiquen si la proporcionalidad es directa o inversa.
- La longitud de la circunferencia en función del radio.
- El área de un círculo en función del radio.
- La medida de la altura de un triángulo de 4 cm^2 de área en función de la medida de la base.

b. Escriban la fórmula correspondiente a cada una de esas relaciones.

30 **a.** Elijan dos números naturales, el segundo de ellos menor que 3000, y con calculadora hagan las siguientes cuentas:
- Multipliquen los números elegidos.
- Sumen 7 al primero de los números elegidos y multipliquen el resultado de esta suma por el segundo número elegido.
- Al número obtenido como resultado en el segundo paso, resten el número obtenido en el primer paso.

b. ¿Cómo hay que hacer la elección para obtener como resultado el mayor número posible?
Justifiquen su respuesta.

I

ANEXO TEÓRICO

G. CHEMELLO (COORD.) | M. AGRASAR | A. CRIPPA | A. DÍAZ

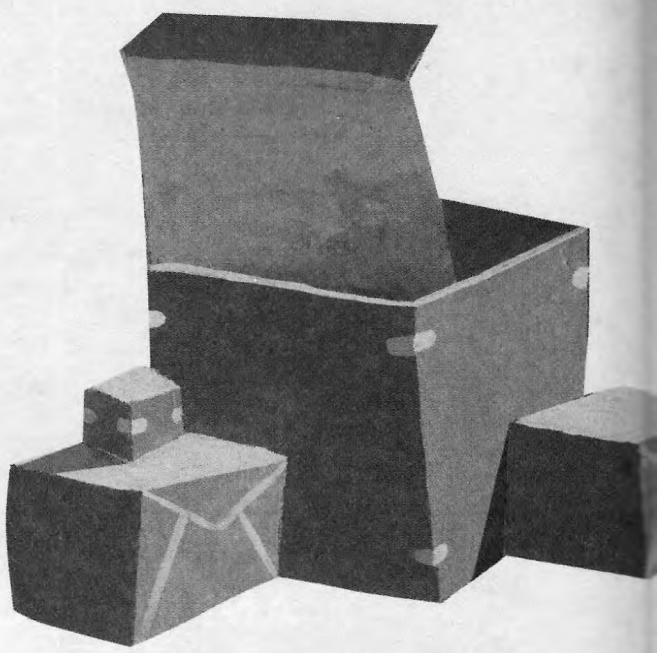
longseller
EDUCACIÓN

Índice

Números y operaciones

Capítulo 1
Números naturales y números enteros || 143
Usos y propiedades de los números naturales
Representación de los números naturales
¿Cómo se usan las letras
al trabajar con números? || 143
Sistemas de numeración || 144
Recta numérica || 145
Suma y resta de números naturales
Propiedades de la suma y de la resta || 146
de números naturales
¿Para qué y como definir? || 146
Propiedad conmutativa de la suma || 147
Propiedad asociativa de la suma
¿Qué es y como se usa un
contraejemplo? || 147
Otra propiedad || 148
Usos de los números enteros
Representación en la recta numérica y orden de
los números enteros || 149
Cómo anotar números enteros || 149
Multiplicación y división
de números naturales || 150
El cero en la multiplicación
y en la división || 150
Propiedades de la multiplicación y de
la división de números naturales || 151
¿Cómo escribir el símbolo *por*? || 151
Propiedades conmutativa y asociativa de
la multiplicación || 152
Propiedad distributiva
Otras propiedades || 153
División entera
Potenciación y raíces de números naturales
Propiedades de la potenciación de números
naturales || 154
El orden de las operaciones || 155
Múltiplos y divisores || 156
Criterios de divisibilidad || 157
Ejemplificar y generalizar || 157
Números primos y compuestos || 158
¿Qué significa demostrar? || 158
Descomposición de un número
como producto de factores primos || 160
Divisores comunes de varios números.
Máximo común divisor
Múltiplos comunes de varios números.
Mínimo común múltiplo || 161
Patrones numéricos
Formas de expresar
regularidades || 161

T. P. | Nº 1 | NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS Y SUS OPERACIONES || 7
Nº 2 | NÚMEROS NATURALES: DIVISIBILIDAD Y REGULARIDADES || 21

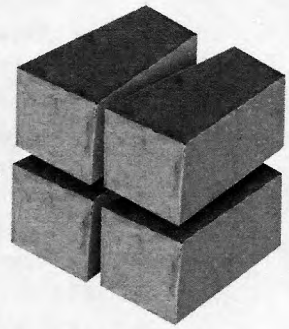


Capítulo 2
Números racionales positivos || 163
Usos de los números racionales positivos
¿Cómo se relacionan las nociones de número racional positivo y razón? || **164**
Representaciones de los números racionales positivos || 165
Expresión fraccionaria
Expresión decimal
Números nuevos y números conocidos || **165**
Para escribir expresiones decimales periódicas || **166**
Recta numérica || **166**
Relaciones y propiedades de los números racionales positivos || 167
Equivalencia || **167**
Proporciones || **168**
Escala
Porcentaje || **169**
Orden || **170**
Densidad || **171**
Suma y resta de números racionales positivos
Multiplicación y división de números racionales positivos || 172
Calcular en forma aproximada || **174**
Propiedades de las operaciones con números racionales positivos || 175
Uso de las propiedades conocidas: índice de variación || **175**
Nuevas propiedades || **176**
Para saber si una igualdad desconocida es válida || **177**
Uso de las propiedades de las proporciones: reparto proporcional || **177**

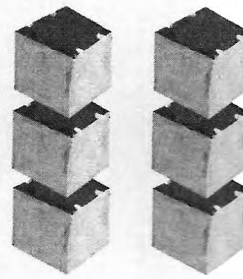
T. P. | Nº 3 | NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS Y SUS OPERACIONES || 35
Nº 6 | RAZONES Y PROPORCIONES || 91

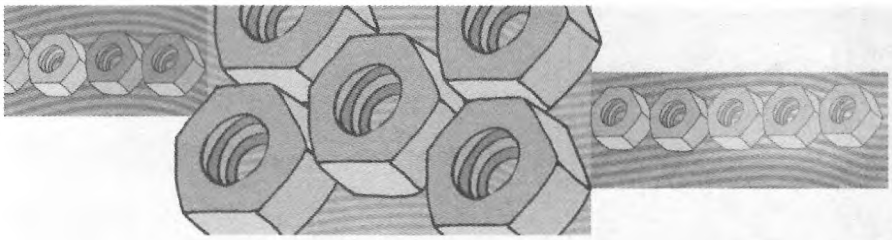
Geometría y medida

Capítulo 3
Cuerpos y figuras || 181
Cuerpos geométricos
Descripción de un cuerpo geométrico
Relaciones entre los cuerpos y sus representaciones || **181**
Poliedros || **182**
¿Cuándo son congruentes dos figuras? || **182**
Cuerpos redondos || **183**
Representación plana de cuerpos geométricos
Construcción de cuerpos geométricos || **184**
Figuras planas || 185
Polígonos
Cubrimiento de una superficie con polígonos || **186**
Triángulos
Alturas y medianas de un triángulo || **187**
¿Qué significa por lo menos? || **187**
Relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo || **188**
Cuadriláteros
Lugar geométrico || 189
Circunferencia y círculo
Mediatriz de un segmento || **190**
Un problema || **191**
¿Para qué se usan las figuras de análisis? || **191**
Bisectriz de un ángulo || **192**



T. P. | Nº 4 | FIGURAS EN EL ESPACIO Y EN EL PLANO || 55
Nº 7 | LUGAR GEOMÉTRICO || 103

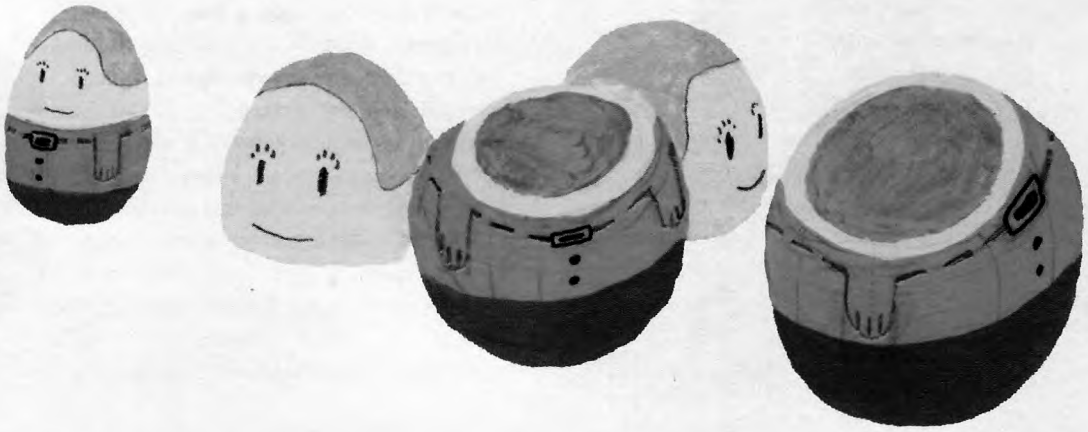




Capítulo 4
Mediciones y cálculo con medidas || 193
Magnitudes, cantidades y medidas
Unidades y sistemas de medición **|| 194**
Cómo usar distintas unidades de la misma magnitud **|| 195**
Errores en las mediciones y en los cálculos con medidas **|| 196**
Estimar la medida **|| 197**
Perímetro y área de figuras || 197
Perímetro de polígonos
Longitud de la circunferencia **|| 198**
Área de polígonos y del círculo **|| 199**
Encuadrar un valor numérico **|| 200**
Área y volumen de cuerpos || 202
Volumen de prismas de base rectangular **|| 203**
Unidades y forma **|| 203**
Volumen de otros prismas y de cilindros **|| 204**

Funciones

Capítulo 5
Gráficas y funciones || 207
Representación de puntos en el plano
Representación de relaciones entre datos || 208
Gráficas cartesianas y tablas de valores
Fórmulas **|| 211**
Gráficas y gráficos **|| 211**
Funciones de proporcionalidad directa || 213
Propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa
Dibujar líneas o puntos **|| 214**
Funciones de proporcionalidad inversa || 216



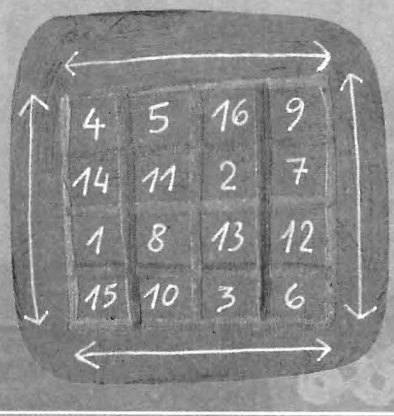
Cuadrado mágico
¿Qué relación encuentran entre estos números? En la página siguiente, pueden leer pistas para responder.

Números de distintas clases

Los números naturales permiten contar cantidades y constituyen una de las primeras creaciones humanas que se asocian al conocimiento matemático. Las operaciones que se pueden hacer con ellos resuelven una enorme cantidad de situaciones sin tener que realizarlas efectivamente, y esto constituye una poderosa herramienta para ahorrar tiempo y esfuerzo. Sin embargo, hay algunas situaciones particulares que, si las quisiéramos resolver con números naturales, parecerían no tener solución. Entonces, nuevos números permiten encontrar las soluciones.

Son varias las clases de números que existen, pues a lo largo de la historia fueron apareciendo nuevos problemas que no era posible resolver con los números conocidos. Además de los números naturales, se encuentran los racionales positivos, los negativos, los irracionales, los reales y los imaginarios, entre otros. Con todos ellos se pueden realizar otras operaciones, además de la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Desde los tiempos de Pitágoras, los matemáticos se interesaron en estudiar los números. Esto fue permitiendo diferenciar sus propiedades y encontrar otras formas de clasificarlos: los pares, los primos, los perfectos y los amigos, entre otros.



PISTAS

Los cuadrados mágicos son cuadrados divididos en 4, 9 ó 16 casillas. En cada casilla, está escrito un número natural y la suma de los números en cada columna, fila y diagonal debe tener el mismo resultado. Si el cuadrado mágico se puede descomponer en varios cuadrados mágicos, lleva el nombre de *hipermágico*. Si, además, ese cuadrado sigue siendo mágico cuando se traslada una columna que está a la derecha hacia la izquierda o una línea que está abajo hacia arriba, entonces, es diabólico.

Este cuadrado mágico tiene como suma constante el 34. Fíjense si también es diabólico y justifiquen en una hoja por qué.

1. Números naturales y números enteros

Usos y propiedades de los números naturales

Los números naturales permiten contar cuántos elementos hay en una colección, determinar qué posición ocupa un elemento en una lista e identificar qué elemento es uno entre otros. Para referirse al conjunto de los números naturales, se usa el símbolo $\mathbb{N}$. También se suele escribir $\mathbb{N}$ indicando los primeros números, del siguiente modo:
$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$, lo que se lee $\mathbb{N}$ es el conjunto formado por 1, 2, 3, 4, etcétera.
Si dos números son tales que uno es el *sucesor* o *siguiente* de otro, como 4 y 3, entonces, se denominan *consecutivos*. Para expresar cualquier par de números consecutivos, se usa n y n + 1*.

El primer número natural es el uno y cada número natural tiene un sucesor o siguiente, que se obtiene sumándole 1.
Entre dos números naturales consecutivos, no existe ningún número natural.

Representación de los números naturales

Para escribir los números naturales, es decir, para representarlos, cada cultura, desde la Antigüedad hasta hoy, asocia un nombre y uno o más símbolos a cada número.

* **¿Cómo se usan las letras al trabajar con números?**
En algunas expresiones, cuando se usan letras, como n, m, a, b, c *y demás, éstas representan cualquier número. Las letras permiten expresar los números de manera general. Si usamos letras para indicar, por ejemplo, una operación entre números, como la adición, al escribir* a + b = c, *con* a, b, *y* c *naturales, estamos indicando todas las adiciones posibles de números naturales y su suma.*

Sistemas de numeración

Las formas de indicar o representar cantidades fueron variando a través de la historia de la humanidad según las necesidades y los conocimientos numéricos de cada época, y dieron lugar a la aparición de diferentes sistemas de numeración.

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que indican de qué manera se combinan para representar cantidades.

Existen dos grandes tipos de sistemas de numeración escrita: los aditivos y los posicionales. Los sistemas egipcio y romano son aditivos porque un número se escribe con una sucesión finita de símbolos y para conocer su valor es necesario sumar (y en el romano, a veces, restar) los valores de cada símbolo, que no cambian y son independientes de su posición.

En los sistemas posicionales, como el babilonio, el maya y el decimal, que es el que usamos actualmente, cada cifra tiene un valor en sí misma y, a la vez, tiene un valor relativo, que depende de la posición que ocupa en el número.

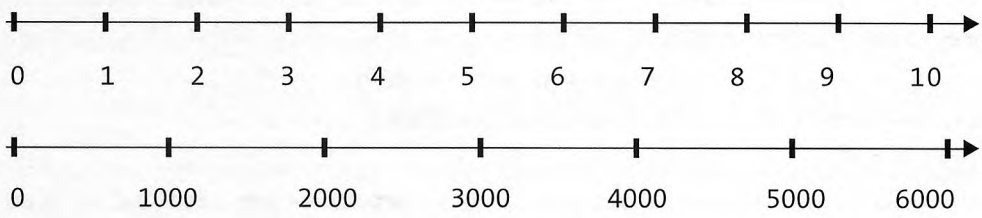
Por ejemplo, en el sistema que usamos habitualmente,
en el número 2532, la cifra 3 vale tres veces diez:
$2532 = 2 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 2$
y en 3522 vale tres veces mil:
$3522 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 + 2$

Este valor relativo está dado por la regla de agrupamiento en una base elegida. En el sistema decimal, cada unidad de un orden se forma agrupando diez unidades del orden anterior:
10 unidades forman una decena
10 decenas forman una centena
10 centenas forman una unidad de mil...

En general, un número natural abcd *escrito en el sistema de numeración decimal se interpreta como* $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \cdot 1$.

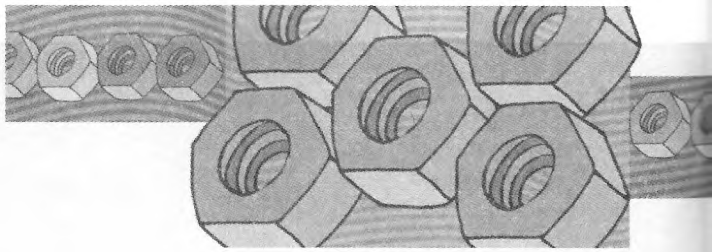
Recta numérica

Una manera de representar los números naturales es señalarlos en la recta numérica y esto puede hacerse tomando diferentes escalas.
En una recta, se marca el 0, que es el origen desde donde se empieza a contar; la unidad es la distancia uniforme que separa dos números naturales consecutivos y la flecha indica el orden creciente.



Suma y resta de números naturales

La suma o adición entre números naturales se puede definir utilizando la noción de sucesor de un número natural.



El resultado de sumar dos números naturales n *y* m *se obtiene al contar* m *sucesores de* n.

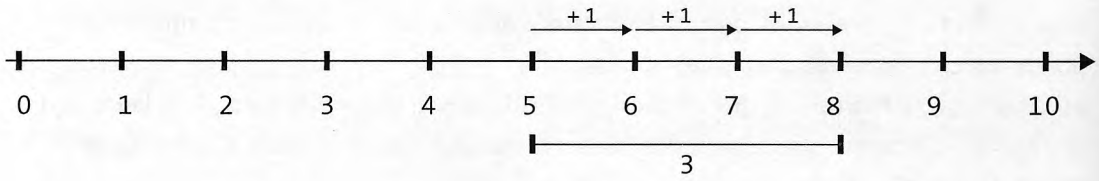
Por ejemplo, para 5 + 3, se puede contar 6, 7 y 8,
que son 3 sucesores de 5.

La resta o sustracción, en cambio, se puede definir* a partir de la suma.

En el caso de que un número natural m *sea mayor o igual que otro* n, *se puede determinar otro número natural* r, *que es la diferencia entre ambos.*
m – n = r, *si* n + r = m, *y del mismo modo resulta que* m – r = n.

Por ejemplo, 8 – 5 = 3 porque 3 + 5 = 8
y de allí también vale que 8 – 3 = 5.

En la recta numérica, se puede indicar la suma avanzando 3 desde 5 hasta 8, y la diferencia entre 8 y 5 se indica como la distancia que hay entre ellos.

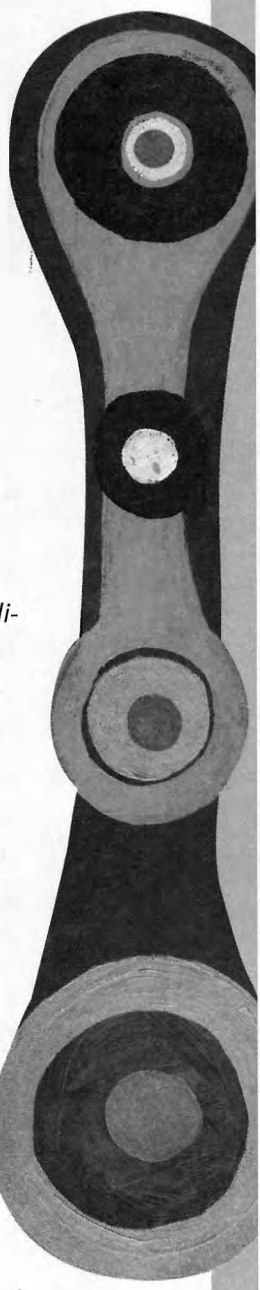


Al hacer sumas, el cero tiene una particularidad: si se suma a un número natural cualquiera, se obtiene el mismo número.

Propiedades de la suma y de la resta de números naturales

Muchas veces, al hacer sumas y restas, se transforman los cálculos y es necesario conocer qué propiedades de las operaciones permiten asegurar que esas transformaciones no alteran el resultado.

* **¿Para qué y cómo definir?**
Se define para precisar el significado que se les quiere atribuir a los términos que se utilizan.
Al definir que la resta m – n *vale para* m ≥ n, *siendo ambos números naturales, se está diciendo que la resta sólo vale en esos casos con* m > n *y* m = n. *Es decir que, si* m < n, *esa definición no vale.*
Cuando se enuncia una definición o se afirma la existencia de una propiedad, es necesario poder precisar cuáles son los casos para los que es válida y aquellos para los que no lo es.



Por ejemplo, para resolver una suma de varios sumandos, se puede proceder cambiando algunos sumandos de lugar y reuniendo pares de sumandos de modo conveniente, como se indica a continuación:

$$6 + 12 + 4 + 5 + 8 + 5 + 7 + 20 + 13 =$$

$$= 10 + 20 + 10 + 20 + 20 = 70$$

Esto se puede hacer porque existen las propiedades siguientes.

Propiedad conmutativa de la suma

La suma es una operación conmutativa, pues al cambiar el orden de los sumandos no se modifica el resultado: $a + b = b + a$.

En el ejemplo anterior, se pueden cambiar de lugar algunos sumandos y queda transformado en:

$6 + 4 + 12 + 8 + 5 + 5 + 7 + 13 + 20$

Propiedad asociativa de la suma

En el caso de una suma de varios sumandos, es posible operar reuniendo distintos pares de sumandos sin modificar el resultado. Por esta razón, decimos que la suma es una operación asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

En el ejemplo anterior, se agrupan los sumandos y queda

$(6 + 4) + (12 + 8) + (5 + 5) + (7 + 13) + 20 =$

En cambio, la resta entre números naturales no es una operación conmutativa ni asociativa.

Por ejemplo, $(10 - 5) - 3 \neq 10 - (5 - 3)$.

Esta expresión es un contraejemplo*.

* **¿Qué es y cómo se usa un contraejemplo?**
En ocasiones, cuando se quiere comprobar si una propiedad vale para todos los números naturales, ocurre que para algún caso no se cumple. Esto es suficiente para afirmar que no es válida para todos. Con un ejemplo donde la propiedad no se cumple, alcanza para asegurar que es falsa. En casos como éstos, ese ejemplo se llama contraejemplo.

Otra propiedad

Utilizando las propiedades anteriores, se puede encontrar otra que permite transformar los cálculos para utilizar resultados conocidos.

Por ejemplo, la siguiente:
En 100 – 78, conviene pensar la resta sumando y restando el número 2.
100 – 78 = 100 – 80 + 2 = 22

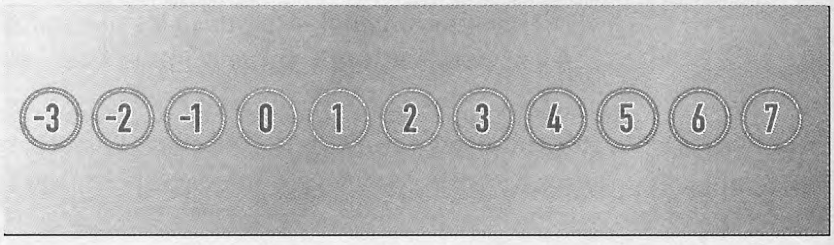
En una suma o en una resta, no se altera el resultado si se suma y resta el mismo número.

Usos de los números enteros

Los números naturales permiten resolver muchos problemas, pero algunas operaciones, como, por ejemplo, 2 – 7, no pueden resolverse con esos números. Por esta razón, los matemáticos necesitaron definir nuevos números, como los *enteros negativos*.

En la mayoría de los problemas que se presentan en la vida cotidiana y que necesitan el uso de números para resolverlos, los signos + y – se utilizan para representar las operaciones de suma y resta. Sin embargo, en algunos casos, estos signos se usan para indicar la relación de una cantidad o un orden con respecto a una referencia que se toma como cero.

Por ejemplo, en el tablero de un ascensor, la planta baja se marca como 0 y el –3 indica el tercer subsuelo.



También se usan los números con signo + o – para indicar transformaciones de la cantidad de elementos de una colección o comparaciones entre cantidades.

Por ejemplo, +4 puede interpretarse como agregar 4, avanzar 4 o tener 4 más que y –5, como quitar o retroceder 5, o tener 5 menos que.

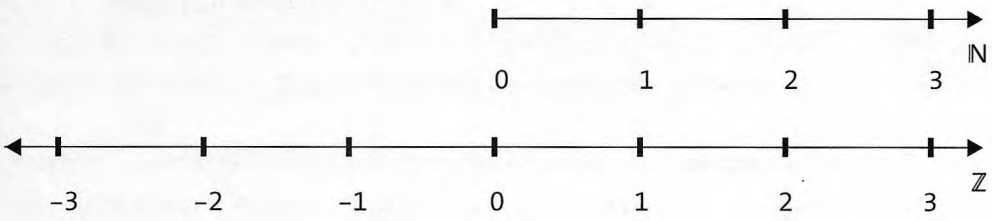
Todas las sumas entre números naturales dan como resultado un número natural, pero no sucede lo mismo con las restas.

Por ejemplo, si sólo se cuenta con números naturales, no se puede resolver 5 – 8. La necesidad de definir la resta entre dos números naturales cualesquiera, sin aclarar que el minuendo sea mayor que el sustraendo, lleva a definir los números enteros negativos, como el –3, el –5, el –12, ...

Los números naturales, o enteros positivos, el cero y los números enteros negativos forman el conjunto de los números enteros. Para referirse a todos los números enteros, se usa la letra $\mathbb{Z}$, es decir, $\mathbb{Z} = \{...-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$.

Representación en la recta numérica y orden de los números enteros

Si la semirrecta que se utiliza para representar a los números naturales y el cero se extiende en el otro sentido, se puede representar a los números enteros*.



Si dos números enteros están a la misma distancia del cero y tienen distinto signo, se llaman opuestos.

Por ejemplo, –3 y 3 , 12 y –12, 25 y –25 son opuestos.
El opuesto de cero es cero.

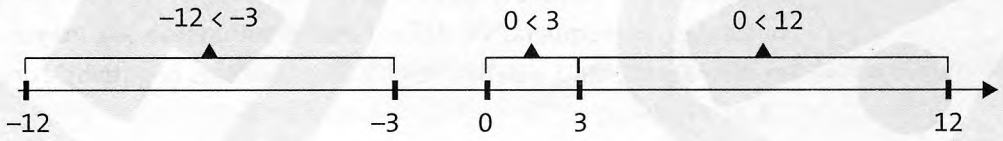
* **Como anotar números enteros**

Para anotar los números enteros positivos, no se utiliza el signo +, ya que ese conjunto coincide con el de los números naturales. Directamente, se anota 4 en lugar de +4. De otro modo, en el caso de la suma de naturales, por ejemplo 6 + 4, tendría que anotarse (+6) + (+4).

En el caso de los números enteros negativos, a veces, se colocan paréntesis para diferenciar el signo del número del signo de una resta. Por ejemplo, se anota 3 – (–5) en lugar de 3 – –5.

Un número negativo es siempre menor que cero y que un número positivo cualquiera. Entre dos números negativos, el menor es el que se encuentra a mayor distancia del cero.

Por ejemplo, $-12 < -3 < 0 < 3 < 12$.



Multiplicación y división de números naturales

La multiplicación se puede definir a partir de la suma, y la división, a partir de la multiplicación.

La multiplicación de dos números naturales n *y* a *puede definirse como la suma de* n *sumandos iguales a* a.

Por ejemplo:

$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ sumandos}} = a \cdot n$ $\qquad 1 \cdot a = a$ $\qquad 0 \cdot a = 0^*$

Si $b = a \cdot n$, se dice que a y n son factores y que b es el producto.
También se puede afirmar, de modo equivalente, que b es múltiplo de a, o que a es divisor de b, pues resulta que $b : a = n$.

A partir de la multiplicación $b = a \cdot n$, *puede derivarse que* $b : a = n$ *y* $b : n = a$.

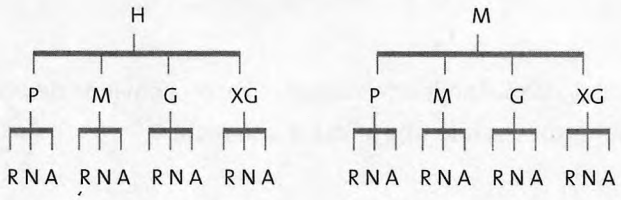
La multiplicación permite resolver, entre otros, problemas como el siguiente:
En una fábrica de buzos, se cortan moldes de tamaño pequeño, mediano, grande y extra grande, para hombre y para mujer. ¿Cuántos moldes distintos se fabrican?

TALLE / SEXO	P	M	G	XG
	HP	HM	HG	HXG
	MP	MM	MG	MXG

* **El cero en la multiplicación y en la división**
En la multiplicación, el cero se llama absorbente *porque cualquier número natural multiplicado por 0 da 0. La división por 0 no está definida porque daría lugar a errores como el siguiente: si 3 x 0 = 4 x 0, entonces, ¡3 = 4!*

En esta organización rectangular, con un cuadro de doble entrada, es fácil ver que la cantidad de moldes puede calcularse como el producto de la cantidad de tamaños por la cantidad de destinatarios: 4 x 2 = 8.

Si se desea ampliar la producción ofreciendo tres colores distintos de cada prenda, rojo, negro y azul, ¿cuántas son las variedades? Para saberlo, es mejor usar un diagrama de árbol.



En este caso, la cantidad de prendas diferentes se obtiene multiplicando 2 x 4 x 3.

Si el diagrama de árbol tiene n *ramas en el primer nivel,* m *ramas en el segundo y* p *ramas en el tercero, entonces, el total de variedades se puede calcular haciendo el producto de las ramas correspondientes a cada nivel:* n · m · p*.
Cuando hay que considerar más de dos variedades, un diagrama de árbol permite organizar la información y verificar que se consideran todos los casos posibles.

Propiedades de la multiplicación y de la división de números naturales

También en los cálculos con multiplicaciones y divisiones, las propiedades permiten hacer transformaciones que los facilitan.

Por ejemplo, para resolver una multiplicación con varios factores, se pueden cambiar algunos de lugar y asociar los factores de manera conveniente.

16 x 25 x 5 x 4

80 x 100 = 8000

* **¿Cómo escribir el símbolo *por?***
Se acostumbra usar el símbolo x entre números, como en 3 x 4, y para no confundir el símbolo por *con la letra* x, *se usa un punto cuando la expresión incluye números y letras, como en 3 · a + 2 · b. También suele encontrarse 3a, en lugar de 3 · a, para* a + a + a.

Propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación

En la multiplicación, es posible cambiar el orden de los factores y no se modifica el resultado: $a \cdot b = b \cdot a$.
Si se tienen más de dos factores, es posible operar reuniendo distintos pares de factores sin modificar el resultado: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Propiedad distributiva

Para facilitar el cálculo al multiplicar, en algunos casos, conviene descomponer alguno de los factores en dos números usando una suma o una resta.

Por ejemplo, para 16 x 25, se podría descomponer cualquiera de los factores usando una suma o una resta, de esta manera:
$16 \times 25 = (10 + 6) \times 25 = (10 \times 25) + (6 \times 25)$
$16 \times 25 = (20 - 4) \times 25 = (20 \times 25) - (4 \times 25)$

Dados a, b *y* c *números naturales cualesquiera, si a la suma de* a *y* b *(o a su resta) se la multiplica por* c, *se obtiene el mismo resultado que si se multiplica* a *por* c, *y* b *por* c, *y se suman (o se restan) ambos productos:* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

En el caso de la división, para facilitar los cálculos, sólo se puede descomponer el dividendo.

Por ejemplo, como en los siguientes casos:
$116 : 4 = (100 + 16) : 4 = (100 : 4) + (16 : 4)$
$116 : 4 = (120 - 4) : 4 = (120 : 4) - (4 : 4)$

Si a, b *y* c *son números naturales, con* a *y* b *múltiplos de* c, *se obtiene el mismo resultado si se divide por* c *la suma (o la resta) entre* a *y* b *que si se divide* a *por* c *y* b *por* c, *y después se suman (o restan) ambos cocientes:* $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Otras propiedades

En una multiplicación, se pueden factorizar uno o más factores sin que cambie el resultado.
En una división, si se divide (o multiplica) el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no cambia.

Por ejemplo, como en estos casos:
1275 x 20 = 1275 x 10 x 2 = 12.750 x 2 = 25.500
450 : 15 = (450 : 5) : (15 : 5) = 90 : 3 = 30

División entera

Cuando se quiere comprobar el resultado de las cuentas de dividir, se puede hacer una multiplicación y una suma, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rr|l} & 267 & 15 \\ \cline{3-3} - & 150 & 10 \\ \cline{2-2} & 117 & +\ 7 \\ \cline{2-2} - & 105 & 17 \\ \cline{2-2} & 12 & \end{array}$$

17 x 15 + 12 = 267
12 < 17

Efectuar la división entera de un número natural D por otro número natural d *(*d ≠ *0 y* r < d*) es encontrar dos números naturales* c *y* r *(únicos) que cumplen esta relación:* d · c + r = *D.*

Cuando el resto de una división es cero, se denomina *división exacta*. En este caso, para comprobar el resultado de la cuenta de dividir, sólo se multiplican entre sí el divisor y el cociente.

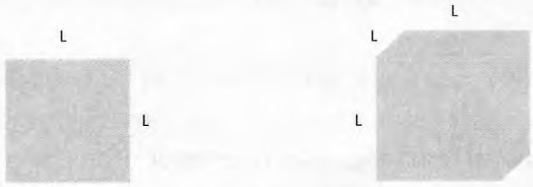
Potenciación y raíces de números naturales

Cuando en una multiplicación todos los factores son iguales, es posible definir una nueva operación: la *potenciación*.

Por ejemplo, en 2 x 2 x 2 x 2 = 2^4, que se lee *dos a la cuarta*, el número 4, llamado *exponente*, indica la cantidad de veces que se repite el 2 como factor. El factor que se repite se denomina *base* y se llama *potencia* al resultado.

De manera general, para cualesquiera a *y* n *naturales, si se multiplica* a *por sí mismo* n *veces, se obtiene* b*, que se escribe:* $a^n = b$.

Las potencias 2 y 3 se usan con bastante frecuencia en cálculos de medidas de figuras y cuerpos.



Área del cuadrado: $L \cdot L$. Lado al cuadrado se escribe L^2.

Volumen del cubo: $L \cdot L \cdot L$. Lado al cubo se escribe L^3.

Las potencias también se usan para expresar de otra forma la descomposición de números escritos en el sistema de numeración decimal.

Por ejemplo, para 2532, se obtiene lo siguiente:

$2532 = 2 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 2$

$2532 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2$

Propiedades de la potenciación de números naturales

Como en los casos anteriores, también estas propiedades funcionan como reglas para las transformaciones en los cálculos y pueden ser utilizadas para facilitarlos.

La potenciación no es conmutativa porque, si se intercambian de lugar el exponente y la base, el resultado es diferente. En general, $a^b \neq b^a$.

Un contraejemplo es $2^3 \neq 3^2$.

Multiplicar dos potencias de igual base equivale a elevar esa base a la suma de los exponentes: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

Por ejemplo, $10^3 \times 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$.

$3 + 4 = 7$

Dividir dos potencias de igual base equivale a elevar esa base a la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor: $a^b \cdot a^c = a^{b-c}$.

Por ejemplo, $10^4 : 10^3 = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10} = 10^1$

De la propiedad anterior se desprende lo siguiente:

Todo número distinto de cero elevado a la potencia 0 da por resultado 1.

Por ejemplo, $5^3 : 5^3 = 5^0 = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5} = 1$

En el caso en que se desee saber si, dado un número *x*, existe algún número *b* que elevado al cuadrado dé como resultado *x*, lo que se está buscando es su raíz cuadrada: $\sqrt[2]{x} = b$ si $b^2 = x$.

Por ejemplo, $\sqrt[2]{36} = 6$ porque $6 \times 6 = 36$.

De manera general, se puede escribir $\sqrt[n]{x} = b$ *si* $b^n = x$.

El orden de las operaciones

Al resolver un cálculo que involucra distintas operaciones, hay que prestar particular atención al orden en que se realizan dichas operaciones.
Algunas veces, el cálculo deriva de un enunciado como el siguiente:

Para comprar 12 cajas de ravioles a $4 cada caja y 2 latas de salsa a $3 cada lata, ¿cuánto se gasta?

Escribiendo las cuentas, se obtiene la expresión $12 \times 4 + 2 \times 3$.
Si se hace 12×4, se le suma 2 y luego se multiplica por 3, se obtiene 150.
Si se multiplica primero 12 por 4, luego 2 por 3 y se suman ambos resultados, se obtiene 54.
En este caso, el sentido del problema indica que la respuesta es 54.

Pero ¿en qué orden se resuelve cuando no hay un enunciado?

Por ejemplo, para el cálculo $2 \times 3 + 2 \times 4$:
Si se multiplica primero, resulta $6 + 8 = 14$.
Si se suman primero 3 y 2, resulta $2 \times 5 \times 4 = 40$.
Si se usa la propiedad distributiva, resulta $2 \times (3 + 4) = 14$.

En este caso, el orden que se elige para operar es aquel cuyo resultado coincide con el que se obtiene al aplicar la propiedad distributiva.

En general, cuando hay que resolver cálculos donde aparecen varias operaciones sin tener la referencia de un problema, se resuelve en el siguiente orden:

$2 + 5 \times 7 - \sqrt{36} : 3 \times 3^2 + 23 : 4 - 2 =$

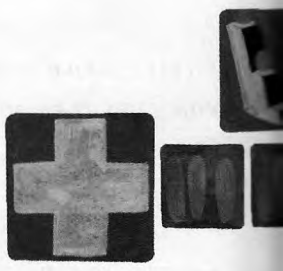
Raíces y potencias

$= 2 + 5 \times 7 - 6 : 3 \times 9 + 8 : 4 - 2 =$

Multiplicaciones y divisiones

$= 2 + 35 - 18 + 2 - 2 =$

Sumas y restas $= 19$

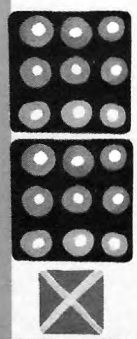


En el caso en que se necesite modificar este orden, se utilizan paréntesis y lo que está dentro de éstos se debe resolver primero.

Por ejemplo, para indicar que a 2 se le suma 3 y el resultado se multiplica por 4, se escribe $(2 + 3) \times 4$, que es igual a 20.

Múltiplos y divisores

De manera general, un número b *que es múltiplo de* a *se puede escribir como un producto* k . a, *siendo* k *un número natural. En ese caso,* a *es divisor de* b.



Por ejemplo, 20 es múltiplo de 5 porque existe 4, que multiplicado por 5 da 20; 20 es divisible por 5, ya que $20 : 5 = 4$ y el resto es 0.

La suma de dos múltiplos de un número natural *n* ¿es múltiplo de *n*?
Para responder a esta pregunta, es posible razonar usando la definición de *múltiplo* y la propiedad distributiva de la multiplicación de números naturales.
El razonamiento realizado* permite asegurar que la respuesta a la pregunta es afirmativa. De manera similar, se puede probar que si se sabe que la suma de dos números es múltiplo de *n* y uno de los sumandos lo es, entonces, el otro sumando es múltiplo de *n*.

¿POR QUÉ?	EN UN EJEMPLO	EN GENERAL
b y c son múltiplos de n.	$180 = 36 \times 5$ $125 = 25 \times 5$	$b = k \cdot n$ $c = j \cdot n$
Se suman esos múltiplos.	$180 + 125 = 36 \times 5 + 25 \times 5$	$b + c = k \cdot n + j \cdot n$
Se usa la propiedad distributiva.	$180 + 125 = (36 + 25) \times 5$	$b + c = (k + j) \cdot n$
La suma de k y j es r.	$180 + 125 = 61 \times 5$	$b + c = r \cdot n$

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad permiten reconocer si un número es divisible por otro sin necesidad de hacer la cuenta. Los criterios más utilizados son los siguientes:

UN NÚMERO ES DIVISIBLE POR	
2	si termina en 0 o cifra par.
3	si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
4	si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4.
5	si termina en 0 o en 5.
6	si lo es por 2 y por 3 al mismo tiempo.
8	si las tres últimas cifras forman un número que es múltiplo de 8.
9	si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
11	si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es un múltiplo de 11.

Para entender por qué funcionan los criterios, hay que trabajar con cada uno; por ejemplo, el criterio de divisibilidad por 3. Es posible razonar usando un ejemplo numérico y después usar los mismos argumentos para cualquier número natural.

* **Ejemplificar y generalizar**

Ejemplificar una definición o una propiedad es encontrar un caso particular en el que ésta se cumpla. Generalizar es, en cambio, encontrar una expresión que incluya todos los ejemplos posibles.

El número $n = 753$ se puede escribir como figura en la expresión de la derecha.	$753 = 7 \times 100 + 5 \times 10 + 3$
Para cada término, se descompone la unidad seguida de ceros en dos sumandos.	$753 = 7 \times (1 + 99) + 5 \times (1 + 9) + 3$
Se usa la propiedad distributiva.	$753 = 7 \times 1 + 7 \times 99 + 5 \times 1 + 5 \times 9 + 3$
Se escribe como dos sumandos .	$753 = (7 + 5 + 3) + (7 \times 99 + 5 \times 9)$
Se factoriza, de manera conveniente, el segundo sumando, para mostrar que resulta una expresión que es múltiplo de 3.	$753 = (7 + 5 + 3) + (7 \times 33 \times 3 + 5 \times 3 \times 3)$ $753 = (7 + 5 + 3) + (7 \times 33 + 5 \times 3) \times 3$
Si el primer sumando, que es la suma de las cifras de n, es múltiplo de 3, entonces, el número n lo es.	Como $7 + 5 + 3 = 15$, 753 es múltiplo de 3

Para demostrar* el criterio de divisibilidad por 3 para un número natural de tres cifras, se puede escribir $n = p \cdot 100 + q \cdot 10 + r$.
Procediendo igual que en la tabla anterior, se obtiene lo siguiente:

$n = (p + q + r) + (p \,.\, 99 + q \,.\, 9)$

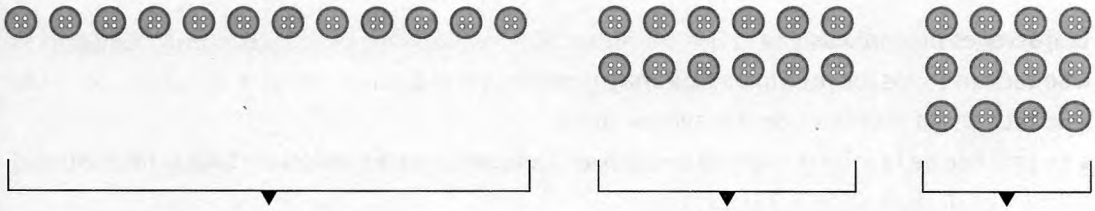
Este sumando es múltiplo de 3.

Para que n sea múltiplo de 3, entonces, $(p + q + ... + r + s)$ debe ser múltiplo de 3, o sea, la suma de las cifras de n debe ser múltiplo de 3, que es el criterio enunciado.

Números primos y compuestos

Algunos números naturales tienen sólo dos divisores y otros tienen más. Esto se puede analizar considerando distribuciones rectangulares. En algunos casos, la distribución sólo se puede hacer de una forma y en otros, de más de una forma.

* **¿Qué significa demostrar?**
Para asegurar que una regla vale para todos los números, no alcanza con verificar que se cumple para muchos ejemplos. La única forma de probarla que se acepta es haciendo un razonamiento general que se apoye en propiedades ya conocidas.



1 x 12 2 x 6 3 x 4

Para el número 12, se pueden hacer tres distribuciones y, por lo tanto, expresar el 12 como producto de dos números de varias formas. Luego, los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores de 12.
Si la tarea se hace con 13 botones, la única posibilidad es 13 x 1. Es decir, los únicos divisores de 13 son 1 y 13.

Los números naturales distintos de 1 que cumplen con la condición de que sus únicos divisores son el mismo número y 1 se llaman números primos. *Los números que poseen más divisores reciben el nombre de* números compuestos.
Los números 0 y 1 no son considerados ni primos ni compuestos.

Para obtener los primeros números primos, es posible usar el cuadro siguiente, tal como lo hizo Eratóstenes en el siglo III a. C.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Eratóstenes procedió así:

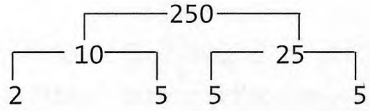
- Se tachan todos los múltiplos de 2 mayores que 2, y el 1.
- Se tachan los múltiplos de 3 mayores que 3.
- Se procede de la misma manera con el 5, el 7, etcétera, y así quedan sin tachar los números primos, es decir, 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...

Hay infinitos números primos, tan grandes como se quiera.

Descomposición de un número como producto de factores primos

Una manera de hallar los divisores de un número compuesto que no son él mismo ni 1 es considerar los números primos ordenados 2; 3; 5; 7; ... y verificar si son divisores o no del número en cuestión, o factorizarlo hasta obtener números primos.

Por ejemplo, para 250, eso puede hacerse de las siguientes formas:



$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^3$

250	2
125	5
25	5
5	5
1	

Todo número natural compuesto puede descomponerse de una única manera, expresándolo como el producto de sus factores primos.

Divisores comunes de varios números. Máximo común divisor

En algunos casos, es necesario conocer el mayor de los divisores comunes de dos o más números. Cuando se simplifica un par de números que tienen varios divisores comunes, se ahorran pasos si se simplifica por el mayor de ellos.

Por ejemplo, si se tiene que simplificar 30 y 24, se procede así:
Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.
Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.
El mayor divisor común de 30 y 24 es 6. Si bien se podría comenzar a simplificar por 2 o por 3, resulta más económico hacerlo por 6.

El máximo común divisor *entre dos números naturales* a *y* b *se simboliza mcd* (a, b) *y se obtiene calculando el producto de los factores primos comunes a* a *y* b.

Múltiplos comunes de varios números. Mínimo común múltiplo

En otros casos, hay que averiguar el menor de los múltiplos comunes a dos o más números.

Por ejemplo, desde una ciudad, se necesita enviar mercadería a otras dos ciudades simultáneamente, pero un transporte sale cada 6 días y otro, cada 5 días. Si salen juntos un lunes, hay que calcular cuándo vuelve a coincidir la salida, sabiendo que ese día es 1 de abril.
Luego:
Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
El múltiplo común menor de 5 y 6 es 30, por lo que los transportes saldrán juntos el 1 de mayo.

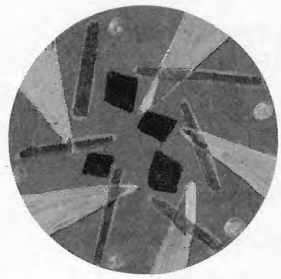
El múltiplo común menor *entre dos números naturales* a *y* b *se simboliza mcm* (a, b) *y se halla calculando el producto de los factores primos comunes y no comunes de* a *y* b.

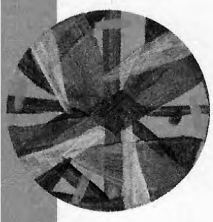
Patrones numéricos

La búsqueda de elementos o pautas comunes en las situaciones que se estudian permite anticipar resultados y justificar algunos de los que se obtienen.
Las regularidades* se suelen denominar *propiedades* o *leyes* y pueden utilizarse para resolver diferentes problemas.

Por ejemplo, en la siguiente secuencia de números:
0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13
cada número se obtiene sumando los dos anteriores, salvo en el caso de los dos primeros.
Otro ejemplo: si se tiene que construir con palillos una serie de estructuras compuestas por triángulos, se puede generalizar la relación entre el número de palillos que se utilizan y el número de triángulos que quedan formados.

* **Formas de expresar regularidades**
Cuando se encuentran esas pautas o características comunes, se busca una forma de expresarlas como ley general. Una forma de expresarlas es a través del lenguaje del Álgebra. Respetando ciertas reglas, se trata de escribir con símbolos las relaciones encontradas.





La ley que cumple esta relación se puede enunciar del siguiente modo: "La cantidad de palillos es igual al número de triángulos por 2, más 1".

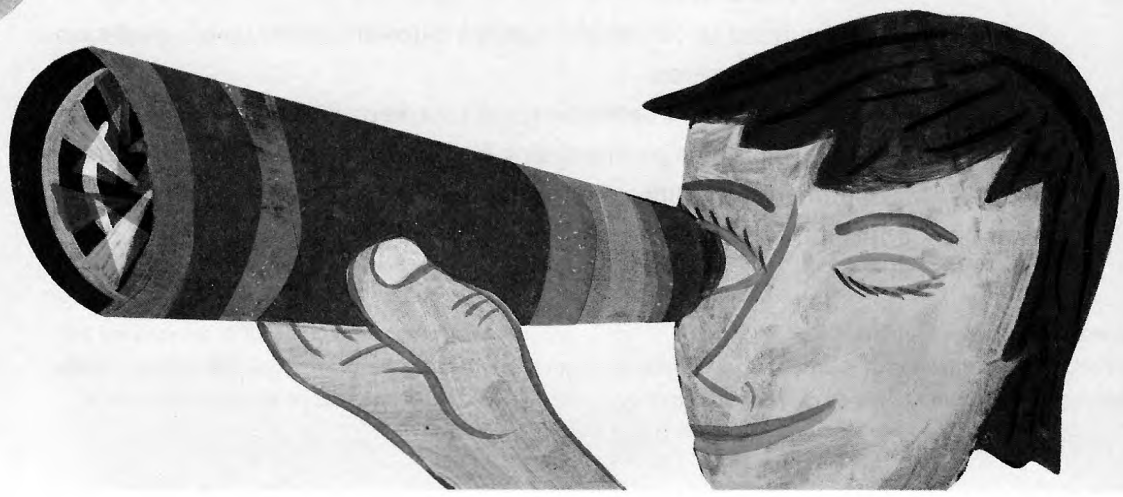
Utilizando el signo igual, se puede escribir lo siguiente:

cantidad de palillos = número de triángulos x 2 + 1

Si llamamos P a la cantidad de palillos y T, al número de triángulos, la relación anterior puede expresarse así: $P = T \cdot 2 + 1$.

Usar esta fórmula permite anticipar, sin necesidad de realizar efectivamente el trabajo de armar las estructuras, la respuesta a las siguientes preguntas:

¿Cuántos triángulos se pueden formar con P palillos? ¿Cuántos palillos se necesitan para armar T triángulos? Esto resulta especialmente útil cuando P y T son números grandes.

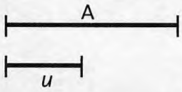


2. Números racionales positivos

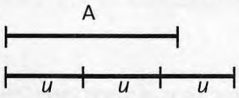
Usos de los números racionales positivos

Si bien los números naturales se usan en gran cantidad de situaciones, existen otras en las cuales estos números no son suficientes. Tal es el caso, entre otros, de las situaciones de medición pues no siempre pueden utilizarse los números naturales para expresar la medida.

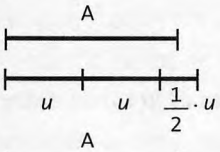
Por ejemplo, se designa con A el largo del segmento que se quiere medir y con *u*, el largo del segmento unidad.



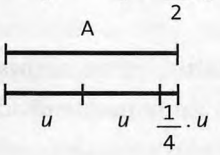
Una manera de medir el segmento cuyo largo es A es la siguiente:



u cabe en A dos veces y un poco más.



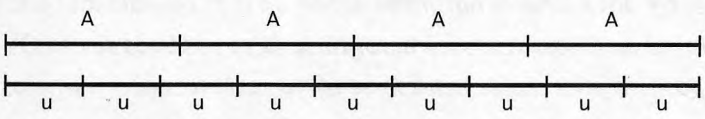
u cabe en A un poco menos de dos veces y media.



u cabe en A exactamente dos veces y un cuarto.

$A = 2\frac{1}{4} \cdot u$, o bien $A = \frac{9}{4} \cdot u$

Otra manera de realizar la medición es repetir A y *u* hasta que coincidan:



$4 \cdot A = 9 \cdot u$, o bien $A = \frac{9}{4} \cdot u$

Al comparar la longitud de un segmento con la de otro segmento considerado como unidad, el número que se obtiene es la medida del segmento respecto de la unidad.

En algunos casos, no es posible repetir la unidad y el segmento que se debe medir hasta que coincidan. En este caso, la medida del segmento no puede expresarse mediante una fracción.

Tampoco son suficientes los números naturales para comparar dos cantidades que no corresponden a una misma magnitud. La comparación se expresa mediante una nueva cantidad que resulta de hacer el cociente entre las otras dos.

Por ejemplo, en ecología y demografía, a veces interesa conocer la densidad de población, que es el cociente entre la cantidad de individuos que componen la población y la superficie que ocupan.
Los datos del cuadro siguiente son del censo nacional 2001.

LA PAMPA	SANTA FE
Menos de 4 hab. x km^2	Entre 20 y 100 hab. x km^2

Tanto en situaciones de medición como en algunos casos en los que se relacionan magnitudes diferentes, es necesario dividir.

El número que expresa el cociente entre dos cantidades es la razón *entre ellas.*

Cuando se realiza la división exacta entre números naturales, no siempre es posible expresar el cociente con un número natural, como ocurre cuando se quiere dividir 5 por 2. Para poder determinar el resultado de una división entre dos números naturales cualesquiera, es necesario considerar otros números denominados *números racionales.*

El cociente entre dos números naturales define un número racional positivo*.
*Para nombrar al conjunto de los números racionales positivos se usa $\mathbb{Q}^+$. Todo número natural es racional positivo pues puede expresarse como cociente entre números naturales**.

* **¿Cómo se relacionan las nociones de número racional positivo y razón?**
Todo número racional positivo es una razón, pero no toda razón es un número racional positivo pues muchas razones expresan cocientes entre números que no son naturales.

Por ejemplo, 4 puede expresarse como cociente entre dos números naturales de las siguientes maneras:
$4 = 4 : 1$; $4 = 8 : 2$; $4 = 16 : 4$; etcétera.

Representaciones de los números racionales positivos

Al igual que en los números naturales, la forma de anotar los números racionales ha ido cambiando a lo largo del tiempo.

Expresión fraccionaria

Desde tiempos de los egipcios, se usaron las expresiones fraccionarias para indicar los cocientes en situaciones de medición y de reparto.
Las fracciones utilizadas tenían numerador 1: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etcétera, es decir, en general $\frac{1}{n}$, siendo n un número natural.
Actualmente, se usan esas expresiones para fracciones tanto mayores como menores que 1.

Expresión decimal

Los babilonios, en cambio, usaron una representación posicional en su sistema sexagesimal para expresar medidas y anotaban las cantidades menores que la unidad colocando los símbolos necesarios a la derecha de los símbolos que indicaban la parte entera.

En el sistema de numeración decimal, los números racionales positivos se escriben respetando la misma regla de agrupamiento que se usa para los números naturales: cada unidad de un orden se forma agrupando diez unidades del orden anterior.
La coma decimal separa la parte entera de las subunidades que surgen de dividir la unidad en diez partes iguales (décimos), en cien partes iguales (centésimos), etcétera.

* **Números nuevos y números conocidos**
Cuando se consideran dos tipos de números, como, por ejemplo, los naturales y los racionales positivos, es posible tener en cuenta sus relaciones. Como los números naturales son racionales y no todos los racionales son naturales, se dice que los racionales incluyen a los naturales y también que los racionales son, respecto de los naturales, una ampliación del campo numérico.

Las expresiones fraccionarias pueden transformarse en decimales haciendo la división que ellas indican.

Por ejemplo, como se observa en la siguiente tabla:

$\frac{9}{8} = 1{,}125$	$\frac{4}{5} = 0{,}8$	$\frac{1}{3} = 0{,}3333...$	$\frac{5}{12} = 0{,}41666...$
9 | 8 10 1,125 20 40 0 $1{,}125 = \frac{1125}{1000}$	4 | 5 40 0,8 0 $0{,}8 = \frac{8}{10}$	1 | 3 10 0,3333 10 10 10 1	5 | 12 50 0,41666 20 80 80 80 8
Expresiones decimales finitas		Expresiones decimales periódicas	

Si la división tiene resto cero, la expresión decimal se denomina *finita* y se puede expresar mediante una fracción decimal. Ambas representan un *número decimal.*

Si no se obtiene resto cero, la expresión decimal se denomina *periódica**. En estos casos, se observa que a partir de un momento dado comienzan a repetirse los restos, por lo que también comenzarán a repetirse las cifras del cociente. Esto ocurre pues el resto es siempre menor que el divisor.

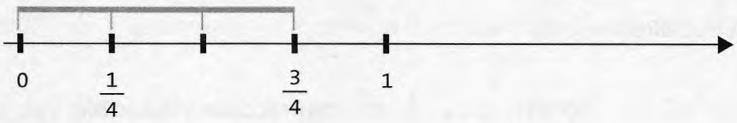
Si en una calculadora cuya pantalla admite diez dígitos introducimos el cociente 1 : 3, en la pantalla aparece 0,333333333. Esto se debe a que el visor de la calculadora sólo puede mostrar una cierta cantidad de cifras, pero no significa que las cifras decimales sean nueve.

Recta numérica

Una forma de representar en la recta numérica un número racional positivo expresado en forma fraccionaria $\frac{a}{b}$ es dividiendo cada segmento unidad en b partes congruentes y tomando a partes a partir del punto que representa el cero.

* **Para escribir expresiones decimales periódicas**
Los puntos suspensivos indican que es posible obtener tantas cifras decimales como se desee sin llegar a obtener resto cero. Las cifras que se repiten forman el periodo *de la expresión decimal y suelen indicarse con un arco:* $0{,}\overline{3} = 0{,}3333...$

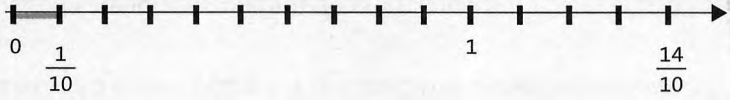
Por ejemplo, como se muestra en este caso:



Para representar con precisión fracciones de denominador 2, 4, 8, etcétera, es posible trazar la mediatriz del segmento unidad para dividirlo en dos partes congruentes y reiterar el procedimiento tantas veces como sea necesario.

Una forma de representar en la recta numérica un número racional positivo expresado en forma decimal es transformándolo en su expresión fraccionaria.

Por ejemplo, $1{,}4 = \frac{14}{10}$ y su representación en la recta numérica es la siguiente:



Relaciones y propiedades de los números racionales positivos

Los números racionales positivos tienen características que les son propias.

Equivalencia

Un mismo número racional puede resultar de la división entre pares de números naturales diferentes.

Por ejemplo, si un ciclista marcha en línea recta con velocidad constante y recorre 3 km en 14 minutos, en 28 minutos recorrerá 6 km. Las fracciones $\frac{3}{14}$ y $\frac{6}{28}$ expresan la misma velocidad (razón entre distancia y tiempo) y se denominan *fracciones equivalentes.*

Decir que una fracción $\frac{a}{b}$ *es* equivalente *a otra* $\frac{c}{d}$ *es lo mismo que decir que* $a \cdot d = b \cdot c$.
Las fracciones equivalentes expresan el mismo número racional.

De todas las fracciones equivalentes que representan el mismo número racional, existe una cuyo numerador y cuyo denominador son números primos entre sí. Estas fracciones se denominan *irreducibles*.

Por ejemplo, $\frac{3}{14}$ es una fracción irreducible.

Proporciones

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, los números naturales *a*, *b*, *c* y *d* determinan una *proporción*. Los términos *a* y *d* se llaman *extremos*, y los términos *c* y *b* se llaman *medios*.

Por ejemplo, los números 3, 7, 9 y 21 forman una proporción pues $\frac{3}{7}$ y $\frac{9}{21}$ son fracciones equivalentes o, lo que es lo mismo, $3 \times 21 = 7 \times 9$.

También es posible formar proporciones con números racionales positivos.

Decir que los números racionales positivos a, b, c, *y* d, *con* $b \neq 0$ *y* $c \neq 0$, *determinan una proporción es lo mismo que decir que la razón entre* a *y* b *es la misma que entre* c *y* d.

Por ejemplo, la razón entre 0,25 y 0,6 es la misma que entre 0,05 y 0,12, lo cual puede escribirse como $\frac{0{,}25}{0{,}6} = \frac{0{,}05}{0{,}12}$.

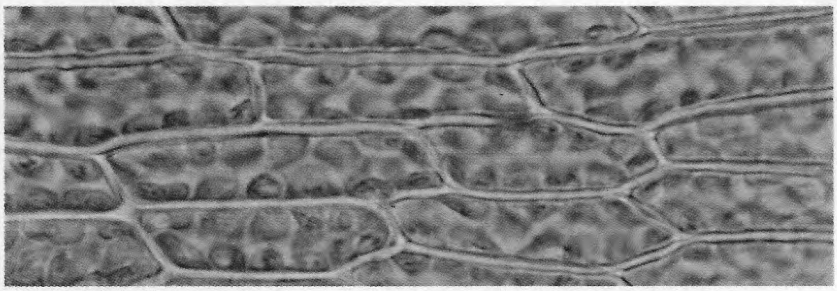
Escala

En los planos y mapas, la escala indica la razón entre una longitud sobre el dibujo y la correspondiente longitud real que fue representada.

Por ejemplo, si, en un plano en detalle de un baño, una bañadera de 1,50 m de largo se dibuja de 7,5 cm de largo, la escala utilizada es $\frac{7{,}50\text{ cm}}{150\text{ cm}} = \frac{1}{20}$. Esta escala se expresa, habitualmente, como 1 : 20 y se lee *uno en veinte*.

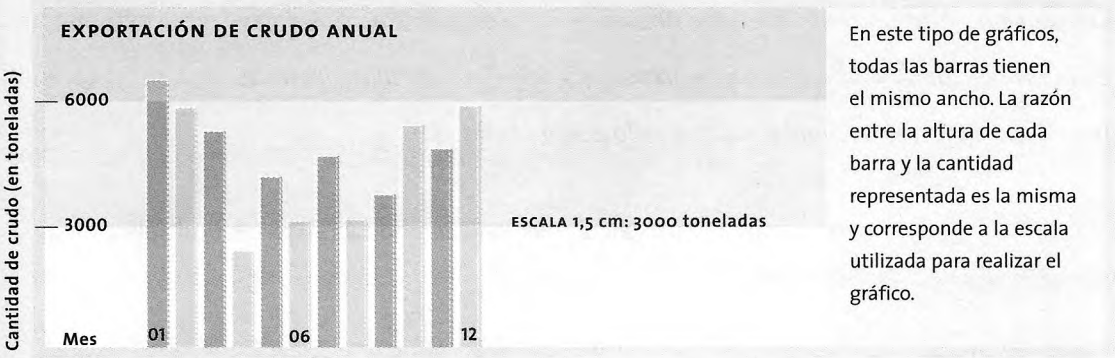
Para calcular la distancia D entre dos puntos, conociendo la distancia d *entre la representación de esos puntos en un dibujo de escala* a : b, *basta con calcular D en la proporción* $\frac{a}{b} = \frac{d}{D}$. *Si la escala es 1 : b, resulta* $D = d \cdot b$, *expresada en la unidad que se usó para determinar* d.

También se usan escalas que amplían las longitudes, como cuando se indica el aumento de una fotografía tomada con un microscopio.



En la fotografía, puede observarse una imagen de célula vegetal vista con un microscopio que aumenta 150 veces. Escala: 150 : 1.

En otros tipos de escalas que se utilizan para diseñar gráficos, es necesario indicar cuáles son las unidades utilizadas.



En este tipo de gráficos, todas las barras tienen el mismo ancho. La razón entre la altura de cada barra y la cantidad representada es la misma y corresponde a la escala utilizada para realizar el gráfico.

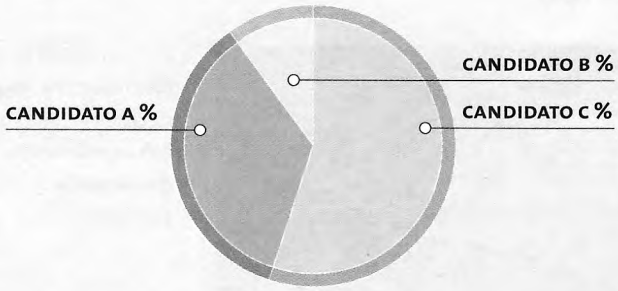
Porcentaje

Dada una razón entre cantidades, es posible encontrar otra equivalente donde se expresa la razón con relación a 100 unidades, que se denomina *porcentaje*. Por lo tanto, cualquier fracción de denominador 100 puede interpretarse como un porcentaje.

Por ejemplo, si en la composición de un alimento a base de cereal se informa que 30 g de cereal contienen 15 g de azúcar, esto equivale a decir que cada 100 g de cereal hay 50 g de azúcar. La razón entre el valor del peso del azúcar y el del peso completo del cereal es $\frac{15}{30} = \frac{50}{100} = 50\%$.

En la información que aparece en los medios de comunicación, muchas veces se usan gráficos que incluyen expresiones porcentuales.

INTENCIÓN DE VOTO



En un gráfico de sectores, la razón entre la medida de cada ángulo central y la de un giro completo es la misma que entre el valor del porcentaje representado y 100. Esta razón también es la misma que la razón entre cada parte representada y el total.

Para expresar como un porcentaje la razón entre una cantidad a *y otra* b, *basta con encontrar el medio* x *en la proporción* $\frac{a}{b} = \frac{x}{100}$; *por lo tanto,* $x = \frac{a \cdot 100}{b}$.
Calcular un cierto porcentaje, c%, *de una cantidad* b *es lo mismo que encontrar el extremo* x *en la proporción* $\frac{x}{b} = \frac{c}{100}$; *en consecuencia,* $x = \frac{b \cdot c}{100}$. *Esto último permite expresar* el tanto por ciento *en forma decimal y multiplicarlo por la cantidad* b.

Por ejemplo, para calcular el 75% de una cantidad, se multiplica dicha cantidad por 0,75.

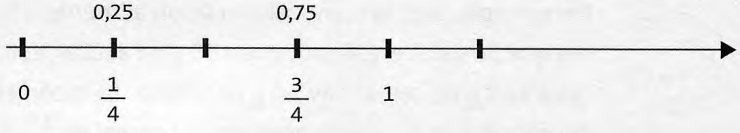
Orden

Una manera de comparar los números racionales es mediante la recta numérica, considerando que "está a la derecha de" puede interpretarse como "es mayor que".

Por ejemplo, como en el siguiente caso:

$\frac{3}{4}$ está a la derecha de $\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$

0,75 está a la derecha de 0,25 $\qquad$ 0,75 > 0,25



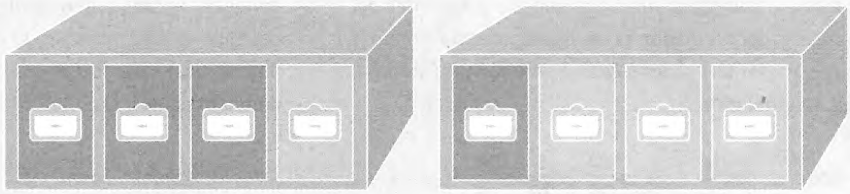
Si los números racionales están expresados en forma decimal, también se pueden comparar de este modo: primero las partes enteras; si éstas son iguales, entonces, se comparan los décimos, y así sucesivamente.

Por ejemplo, 0,75 > 0,25 pues 7 > 2 y 2,034 > 2,031 pues 4 >1.

Si las expresiones son fraccionarias y tienen igual denominador, se trata de partes comparables. Si no lo tienen, pueden buscarse fracciones equivalentes a cada una de ellas, de igual denominador.

Por ejemplo, como en estos casos:

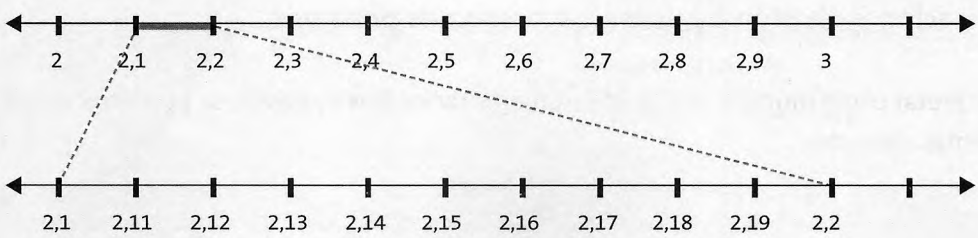
$\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$



$\frac{5}{2} > \frac{7}{3}$ pues $\frac{15}{6} > \frac{14}{6}$

Densidad

Al preguntar cuántos números naturales hay entre 2 y 3, la respuesta es ninguno. Pero si se pregunta cuántos números racionales hay entre 2 y 3, en principio, se puede pensar en números de una cifra decimal que sean mayores que 2 y menores que 3, como 2,1; 2,2; 2,3; ... ; 2,9. También se puede pensar en intercalar números de dos cifras decimales comprendidos, por ejemplo, entre 2,1 y 2,2, como 2,11; 2,12; 2,13; ... ; 2,19.



Este proceso puede continuarse indefinidamente, lo que permite afirmar lo siguiente:

Entre dos números racionales, existen infinitos números racionales. Por esta razón, se dice que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso.

Suma y resta de números racionales positivos

Para sumar números racionales positivos, se puede proceder de diferentes maneras, según cómo están expresados, y siempre se obtiene por resultado un número racional positivo.

PARA SUMAR FRACCIONES	PARA SUMAR DECIMALES
Si se trata de fracciones de distinto denominador, éstas se transforman en fracciones equivalentes del mismo denominador. El resultado es otra fracción del mismo denominador cuyo numerador es la suma de los numeradores. Por ejemplo, $\frac{6}{5} + \frac{1}{4} = \frac{24}{20} + \frac{5}{20} = \frac{29}{20}$	Si se trata de expresiones decimales, se suman las unidades del mismo orden, realizando las conversiones correspondientes y teniendo en cuenta que una unidad es igual a diez décimos, que un décimo es igual a diez centésimos, etc. Por ejemplo, 1,2 + 0,25 = 1,45.

Al igual que en el caso de los números naturales, si el minuendo es menor que el sustraendo, entonces, la resta no está definida.
Según convenga, se suma o se resta expresando los números en forma fraccionaria o decimal.

Por ejemplo, como figura a continuación:

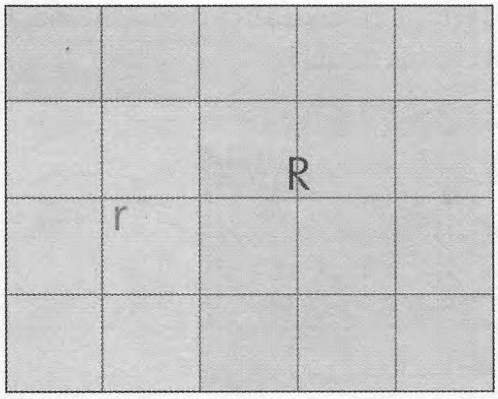
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{1}{32} + \frac{107}{250} = 0{,}03125 + 0{,}428 = 0{,}45925$$

Multiplicación y división de números racionales positivos

Para interpretar cómo multiplicar y dividir números racionales positivos, se pueden analizar los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1: ¿Cuál es el área del rectángulo chico si se considera como unidad de medida el área del rectángulo grande?



Considerando como subunidad un cuadradito, resulta lo siguiente:
Área R = 20 cuadraditos
Área r = 6 cuadraditos
Área r = $\frac{6}{20}$ · Área R

Dado que el área de un rectángulo es igual al producto de su largo por su ancho, esta área puede también interpretarse en términos de producto de números racionales:

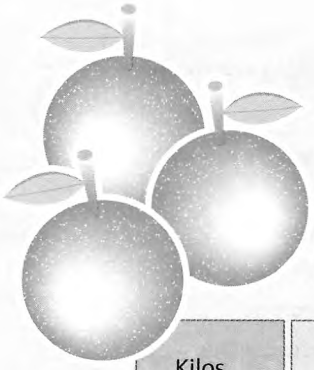
$$\text{Área r} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

También es posible transformar las fracciones en sus equivalentes decimales:

$$\text{Área r} = \frac{75}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{75}{10^2} \times \frac{4}{10^1} = \frac{300}{10^3}$$

o escribirlo con números decimales: Área r = 0,75 x 0,4 = 0,3 = 0,300
El número 0,300 tiene tres cifras decimales porque en la expresión fraccionaria correspondiente se divide por la tercera potencia de 10.

PARA MULTIPLICAR FRACCIONES	PARA MULTIPLICAR DECIMALES
La multiplicación de dos fracciones da por resultado una fracción cuyo numerador se obtiene multiplicando los numeradores y cuyo denominador se obtiene multiplicando los denominadores. Por ejemplo, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$.	La multiplicación de dos números racionales expresados en forma decimal se puede realizar multiplicando los numeradores de las fracciones decimales correspondientes y luego considerando tantas cifras decimales como resulten de sumar los exponentes de las potencias de 10 de los denominadores respectivos. Por ejemplo, 0,75 x 0,4 = 0,3.



EJEMPLO 2: Si de 1 kg de naranjas se obtienen $\frac{3}{4}$ litros de jugo, ¿cuántos kg se necesitan para obtener $3\frac{1}{2}$ litros de jugo?

Una manera de pensarlo es calculando cuánto jugo se va obteniendo con cada kilo de naranjas.

Kilos	1	2	$4 = \frac{12}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
Litros	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{14}{4}$

x 2 x 2

Entonces $\frac{14}{4} : \frac{3}{4} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$. Por lo tanto, para obtener $3\frac{1}{2}$ litros de jugo, se necesitan $4\frac{2}{3}$ kilos de naranjas.

El resultado es el cociente entre los numeradores de $\frac{14}{4}$ y $\frac{3}{4}$.

Con fracciones decimales: $\frac{350}{100} : \frac{75}{100} = \frac{350}{75}$.

Con números decimales: $3{,}5 : 0{,}75 = 350 : 75 = 4{,}\widehat{6}$.

PARA DIVIDIR FRACCIONES	PARA DIVIDIR DECIMALES*
La división de dos fracciones se puede calcular transformándola en una división equivalente, la cual se realiza entre fracciones de igual denominador dividiendo los numeradores de éstas.	La división de dos números decimales se puede transformar en una división equivalente de números naturales dividiendo éstos entre sí.

* **Calcular en forma aproximada**

Al hacer cálculos con decimales, el resultado puede variar según la cantidad de cifras decimales que se consideren. Esto último se decide en función del problema que se trata de resolver.

Propiedades de las operaciones con números racionales positivos

Para operar con números racionales positivos, se pueden utilizar las mismas propiedades que para las operaciones entre números naturales.

OPERACIONES / PROPIEDADES	SUMA	RESTA	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
CONMUTATIVA	sí		sí	
ASOCIATIVA	sí		sí	
DISTRIBUTIVA			RESPECTO DE LA SUMA Y DE LA RESTA	
			AMBOS FACTORES	SÓLO EL DIVIDENDO

En las situaciones siguientes, se muestran ejemplos en los que se utilizan la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta, y la propiedad asociativa de la multiplicación.

Uso de las propiedades conocidas: índice de variación

Se llama *índice de variación* al resultado de sumar o restar a 1 el tanto por ciento expresado en forma decimal.

EJEMPLO 1: Una empresa compra escritorios que cuestan $400 más IVA (impuesto al valor agregado). Para calcular el precio de cada escritorio, se debe sumar a 400 el 21% de 400.

$$\$400 + \frac{21}{100} \times \$400 = \$400 \times \left(1 + \frac{21}{100}\right) = \$400 \times 1{,}21 = \$484$$

Para calcular el valor final, se multiplica la cantidad por el índice de variación. Para una cantidad cualquiera x, usando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, se obtiene lo siguiente:

$$x + 21\% \cdot x = x \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right) = x \cdot (1 + 0{,}21) = x \cdot 1{,}21$$

En el caso de un descuento, el índice de variación por el que se multiplica la cantidad es el resultado de restarle a 1 el tanto por ciento expresado en forma decimal. Para una cantidad cualquiera x resulta:

$$x - 21\%\, x = x \cdot (1 - \frac{21}{100}) = x \cdot (1 - 0{,}21) = x \cdot 0{,}79$$

Para calcular el valor final de varios aumentos o disminuciones porcentuales sobre una cantidad inicial, es posible multiplicar los índices de variación y luego al resultado obtenido multiplicarlo por dicha cantidad.

EJEMPLO 2: $\$240 \xrightarrow{\times 1{,}20} \$288 \xrightarrow{\times 1{,}10} \$316{,}8$

$\$240 \xrightarrow{\times 1{,}20 \times 1{,}10} \$316{,}8$

Para una cantidad cualquiera x, utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación, se obtiene lo siguiente:

$(x \cdot$ índice 1$) \cdot$ índice 2 $= x \cdot$ (índice 1 $\cdot$ índice 2)

Nuevas propiedades

Para operar con números racionales, también se utilizan otras propiedades.

Por ejemplo, el hecho de buscar un número x que multiplicado por 5 dé como resultado 1, puede escribirse $5 \,.\, x = 1$, donde $x = \frac{1}{5}$. En ese caso, 5 y $\frac{1}{5}$ se denominan *recíprocos* o *inversos multiplicativos*.

El recíproco o inverso multiplicativo de un número racional positivo $\frac{a}{b}$ *es* $\frac{b}{a}$ *pues* $\frac{a}{b} \,.\, \frac{b}{a}$ *da como resultado 1.*

Como al multiplicar dividendo y divisor por un mismo número el cociente no cambia, puede plantearse la división de números racionales utilizando el inverso multiplicativo.

Por ejemplo:

$$\frac{7}{2} : \frac{3}{4} = \left(\frac{7}{2} \times \frac{4}{3}\right) : \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{2} \times \frac{4}{3}$$

pues $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ son recíprocos.

Para dividir dos números racionales positivos, se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor.

Además se verifica lo siguiente:

Si los números racionales positivos a, b, c *y* d *forman una proporción, entonces, la razón entre las sumas* a + c *y* b + d *es la misma que entre* a *y* b *o entre* c *y* d.

$$\frac{a+b}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

¿Cómo se puede probar que esto es cierto?*

Para que se forme la proporción, se tiene que verificar que los productos cruzados sean iguales.	$(a + c) \cdot b = (b + d) \cdot a$
El producto del segundo miembro se puede transformar usando la propiedad distributiva.	$(a + c) \cdot b = b \cdot a + d \cdot a$
Como *a, b, c* y *d* forman una proporción, entonces, $a \cdot d = b \cdot c$ y se puede hacer un reemplazo.	$(a + c) \cdot b = b \cdot a + b \cdot c$
Se puede volver a usar la propiedad distributiva.	$(a + c) \cdot b = b \cdot (a + c)$
Como, por la propiedad conmutativa de la multiplicación la última igualdad es verdadera, podemos asegurar que también es verdadera la primera igualdad. Por lo tanto, queda demostrado que es cierto lo que se quería probar.	$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Uso de las propiedades de las proporciones: reparto proporcional

La propiedad demostrada permite calcular las partes en *repartos proporcionales.*

Por ejemplo, dos socios repartieron, en forma proporcional al tiempo trabajado, $360 que cobraron por un trabajo de pintura. Carlos trabajó 6 horas y Nelson, 12 horas.

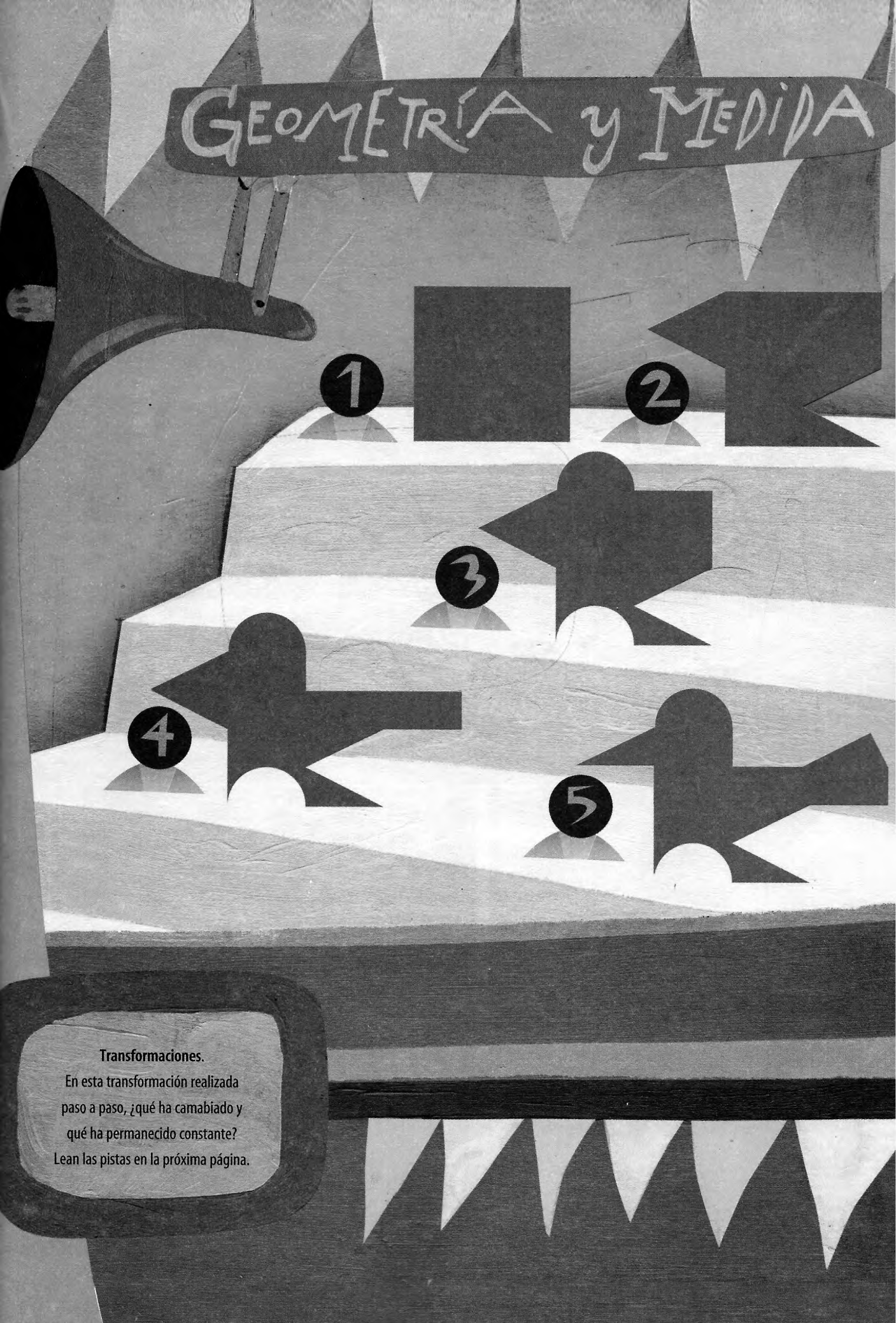
* **Para saber si una igualdad desconocida es válida**
Cuando no se sabe si dos expresiones son equivalentes, es necesario partir del primer miembro de la igualdad para lograr obtener el segundo a través de una cadena de propiedades conocidas.

Para que el reparto sea proporcional, la razón entre el número total de horas trabajadas y el dinero total debe ser la misma razón que entre el tiempo que trabajó cada uno y lo que cobró.

Si C es la cantidad de dinero que cobró Carlos y N, la cantidad de dinero que cobró Nelson, entonces, $\frac{18}{360} = \frac{6}{C} = \frac{12}{N}$

En general, para realizar el reparto de una cantidad n *de forma proporcional a cantidades* a, b, c, ..., *se suman las cantidades que se van a repartir para determinar la razón entre los totales y se forman las proporciones que correspondan:*

$\frac{Pa}{a} = \frac{n}{(a+b+c)}$ *y* $\frac{Pb}{b} = \frac{n}{(a+b+c)}$, *donde Pa indica la parte proporcional a* a *y Pb indica la parte proporcional a* b.



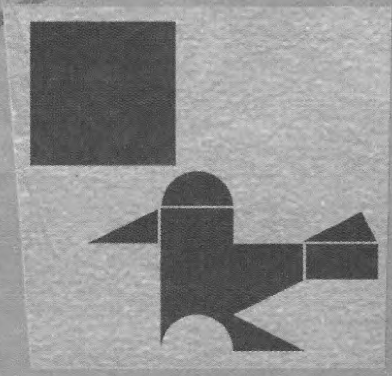
Transformaciones.
En esta transformación realizada paso a paso, ¿qué ha camabiado y qué ha permanecido constante? Lean las pistas en la próxima página.

De la experiencia a la deducción

La Geometría se desarrolló a partir de mediciones astronómicas, representaciones y distribuciones de terrenos. Durante esta primera etapa experimental, los seres humanos tuvieron necesidad de predecir algunos resultados al enfrentar distintas situaciones, sin hacerlo de manera efectiva, sino imaginándolas.

Fueron los matemáticos griegos quienes dieron otra mirada sobre estos conocimientos, resolviendo problemas que se planteaban acerca de figuras y cuerpos pensados como objetos abstractos, es decir, separados de las situaciones reales que les dieran origen. Así, llegaron a conocer propiedades y a comprender que no eran independientes unas de otras, sino que, si se consideran algunas de ellas como punto de partida, se pueden deducir otras mediante razonamientos correctos. Por ejemplo, si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, se puede deducir que la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Por otra parte, la práctica de las mediciones fue evolucionando tanto por los instrumentos que permitieron ir logrando mayor precisión en estas mediciones como por su expresión numérica en relación con los sistemas de numeración y de medidas que estaban en uso en cada época y en cada cultura. Independientemente de las mediciones efectivas, las nociones de medida de las magnitudes espaciales dieron lugar al uso de fórmulas y al estudio de las relaciones entre ellas.



PISTAS

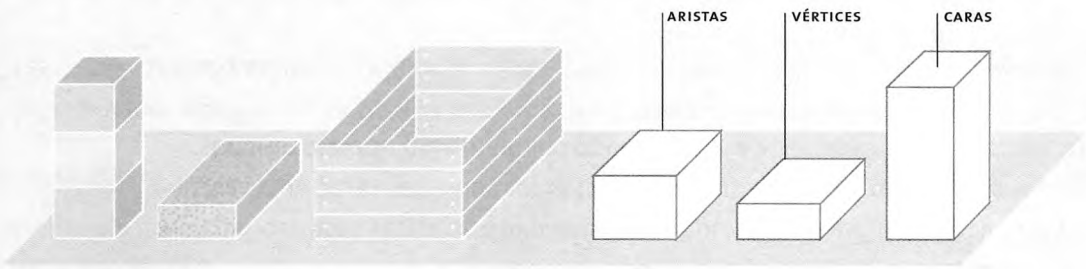
En la página anterior, a partir de una figura geométrica, el cuadrado, se van obteniendo figuras mediante varios pasos. Se va sacando de un lugar y agregando en otro la misma forma con la misma área, de tal modo que el área total permanece siempre constante.

Dibujen un hexágono regular y transfórmenlo en otra figura. Comparen con sus compañeros las figuras obtenidas.

3. Cuerpos y figuras

Cuerpos geométricos

Si se necesita comunicar la forma y las dimensiones de un objeto, la distribución de un terreno o un recorrido, es conveniente y, algunas veces, imprescindible hacer una descripción oral o dibujada en la que intervienen nociones geométricas.
En el caso de los dibujos de la imagen, las formas tienen características comunes y pueden ser asociadas a una misma idea geométrica: la de prisma rectangular.



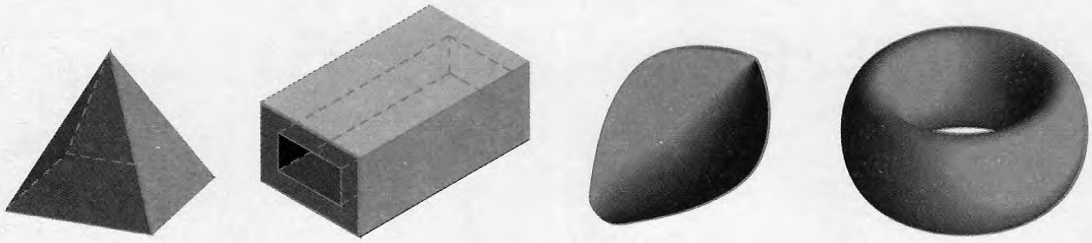
Un cuerpo geométrico es una forma, en el espacio de tres dimensiones, que está limitada por superficies planas o curvas.

Descripción de un cuerpo geométrico

Para identificar un cuerpo, es necesario distinguir aquellos aspectos que lo caracterizan y lo diferencian de otros*. Se puede tomar en cuenta si tiene o no agujeros, la forma de las caras o superficies que lo limitan y las relaciones que se establecen entre ellas. Éstas son características que permiten identificar un determinado cuerpo.

* **Relaciones entre los cuerpos y sus representaciones**
Cuando se estudian las propiedades de un tipo de cuerpos, es decir, las relaciones entre sus distintos elementos, aunque se trabaje sobre una representación particular, se pueden obtener conclusiones que valen para todos los cuerpos con esas características, cualesquiera que sean sus dimensiones.

Los cuerpos son ideas, al igual que los números, es decir, conceptos abstractos. Los dibujos sirven para realizar análisis, estudiar algunas regularidades y para encontrar argumentos, pero no sirven para demostrar propiedades.



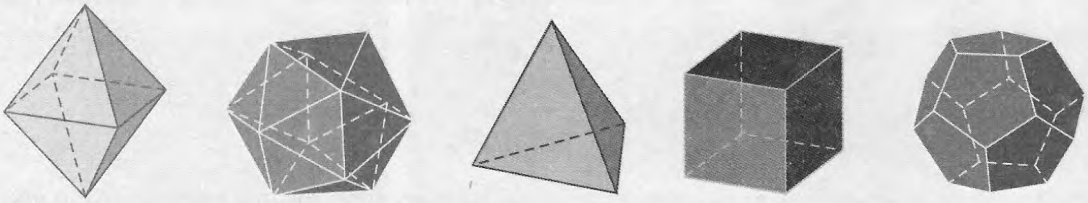
Poliedros

Los cuerpos que poseen todas sus caras planas se denominan poliedros.

Esta palabra deriva del griego *polys,* que significa *muchos*, y de *edra*, que significa *caras*.
Además, los poliedros poseen aristas, que son los segmentos comunes a dos caras, y vértices, que son los puntos donde concurren más de dos caras.

Los poliedros cuyas caras son polígonos regulares congruentes se llaman* poliedros regulares.

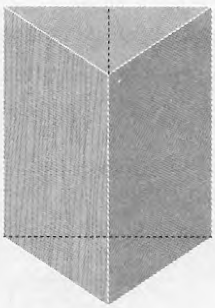
En estos cuerpos, cada vértice está rodeado por un mismo número de caras.
Euclides demostró que sólo existen cinco cuerpos con estas características.
A los poliedros los griegos les atribuían propiedades místicas y los asociaban con elementos fundamentales.



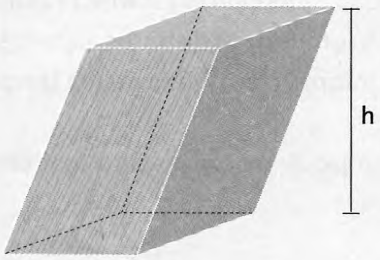
OCTAEDRO | AIRE ICOSAEDRO | AGUA TETRAEDRO | FUEGO CUBO | TIERRA DODECAEDRO | COSMOS

Los poliedros que tienen caras laterales rectangulares o con forma de paralelogramo se denominan prismas. *Tienen dos bases y la distancia entre ellas es la altura del prisma.*
Los poliedros que tienen caras laterales triangulares se denominan pirámides. *Tienen una base y la distancia que existe entre ella y la cúspide es la altura de la pirámide.*

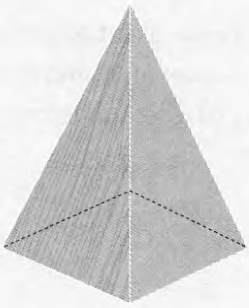
* **¿Cuándo son congruentes dos figuras?**
Se considera que dos figuras en el plano son congruentes cuando al superponerlas coinciden punto por punto, por lo que las medidas de sus lados y ángulos son iguales.



PRISMA RECTO TRIANGULAR: tiene un par de caras paralelas; las bases superior e inferior son triángulos, en tanto que las caras laterales son rectángulos.



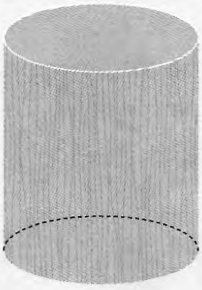
PRISMA RECTANGULAR OBLICUO: tiene tres pares de caras paralelas; dos caras opuestas cualesquiera pueden ser consideradas bases.



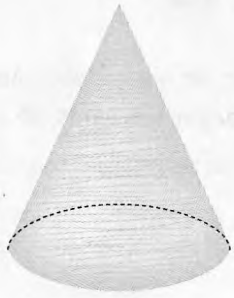
PIRÁMIDE DE BASE CUADRADA: no tiene caras paralelas, la base es cuadrada y las caras laterales son de forma triangular.

Cuerpos redondos

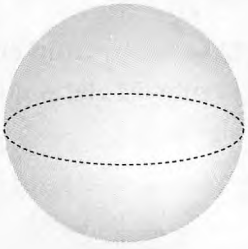
Entre los cuerpos sin agujeros que no tienen todas las superficies que los limitan planas, denominados *cuerpos redondos*, algunos reciben nombres particulares.



CILINDRO: tiene dos superficies planas paralelas y circulares, llamadas *bases*.



CONO: tiene una base plana y circular, y una cúspide o vértice opuesto a la base.



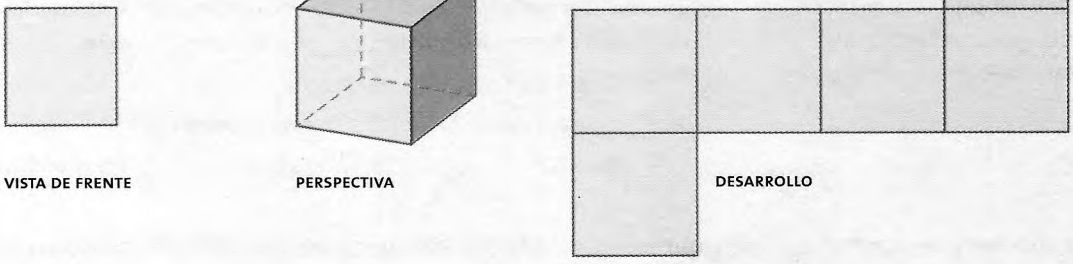
ESFERA: no tiene superficies planas ni vértices.

Representación plana de cuerpos geométricos

Las actividades humanas se desarrollan en un espacio de tres dimensiones, que se pueden relacionar con tres direcciones: arriba – abajo, adelante – atrás y derecha – izquierda. Sin embargo, muchas de las representaciones que se hacen del espacio y de los objetos son planas. Las revistas, las hojas de carpeta, el pizarrón y hasta la pantalla del televisor muestran una realidad en dos dimensiones.

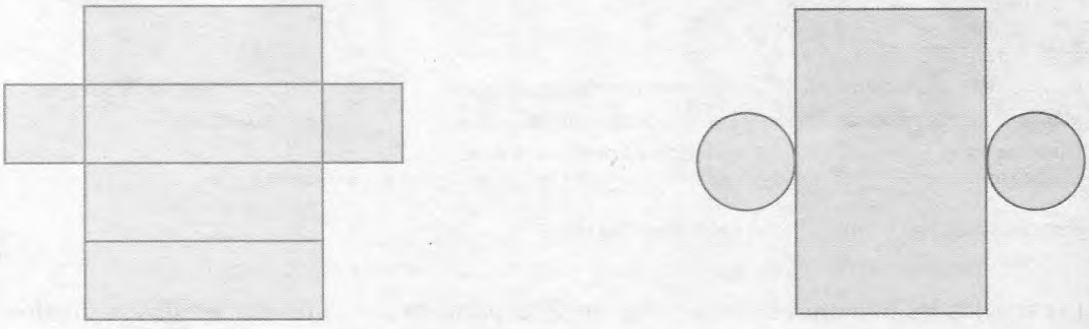
Tanto las fotos como un mapa de una ciudad están sobre superficies. Aunque pueden corresponder al mismo espacio físico, muestran distintos aspectos, son distintas representaciones y su elección depende de la información que se quiera transmitir.

Por ejemplo, éstas son distintas representaciones de un cubo:



Construcción de cuerpos geométricos

Si se desarma un envase de cartón de algún medicamento o alimento y no se toman en cuenta las aletas que sirven para pegar sus caras, se obtiene un molde o patrón como los siguientes:

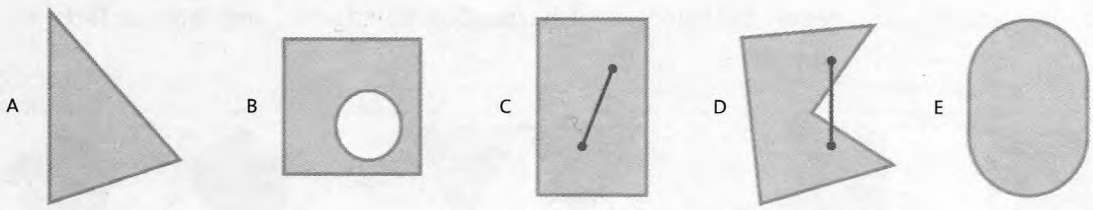


Esta manera de representar un cuerpo en el plano recibe el nombre de *desarrollo*. Para realizarlo, se distribuyen las caras de un cuerpo en una sola pieza. Al plegarlo por las líneas interiores, es posible volver a armar el cuerpo.

Figuras planas

Una figura plana es una superficie limitada por líneas curvas o rectas, con agujeros o sin ellos.

Por ejemplo, las siguientes son figuras planas:

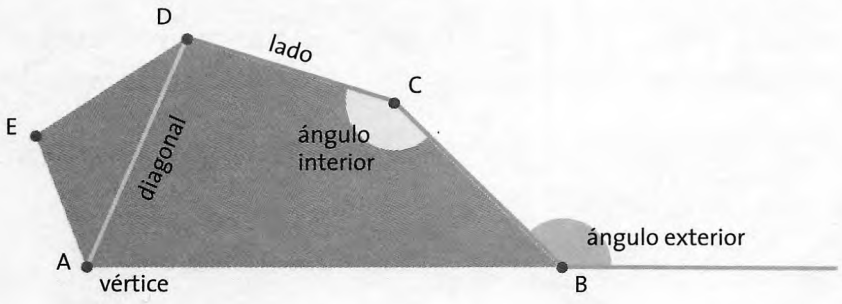


Una manera de describir una figura geométrica es analizar si el segmento determinado por cualquier par de puntos pertenecientes a la figura está incluido o no en ella.
En el caso de la figura C, cualquier par de puntos determina un segmento incluido en la figura. Se trata de una figura convexa. En cambio, en la figura D, se pueden encontrar pares de puntos que determinan segmentos no incluidos en ella. Se trata de una figura cóncava.

Polígonos

Las figuras cuyo contorno está formado por segmentos de recta se denominan polígonos.

En un polígono, se reconocen los elementos indicados en la siguiente figura:

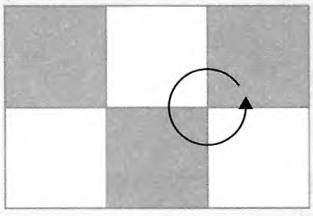


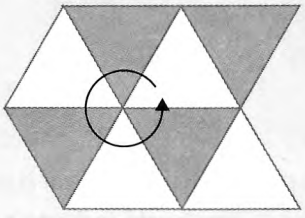
Al igual que en el caso de otras formas geométricas, los polígonos se pueden clasificar de diferentes maneras. Una muy usada es la que tiene en cuenta el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y demás. También se pueden agrupar según se trate de polígonos cóncavos o convexos.

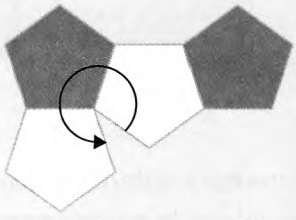
Cubrimiento de una superficie con polígonos

Cuando se cubre una superficie con distintas figuras planas, sin superponerlas, puede ocurrir que queden o no espacios libres.

Por ejemplo, resulta fácil cubrir una superficie con baldosas cuadradas y con triángulos equiláteros. Con pentágonos regulares la tarea es imposible.





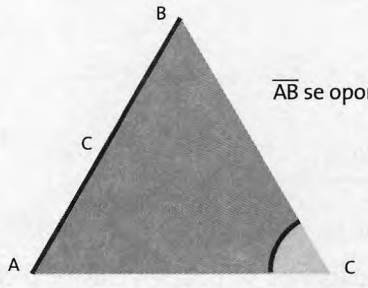


La condición que se debe cumplir para que una forma poligonal cubra el plano es que la suma de las amplitudes de los ángulos que concurren en un punto sea 360°.

Triángulos

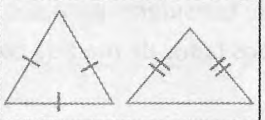
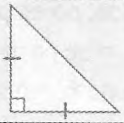
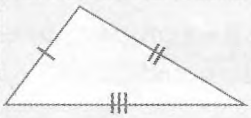
Los triángulos son polígonos de tres lados, tres ángulos y tres vértices.

Los triángulos necesariamente son figuras convexas, aunque tengan diferentes dimensiones y estén dibujados en distintas posiciones. En todo triángulo, cada vértice tiene un lado que se le opone.



Se escribe: $\hat{}$
ángulo C o $\hat{C}$
lado AB o $\overline{AB}$, también lado C

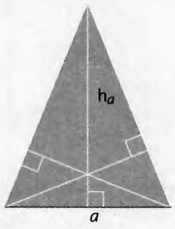
Si se tienen en cuenta distintos elementos, es posible organizar diferentes clases de triángulos, como se ve en el siguiente cuadro:

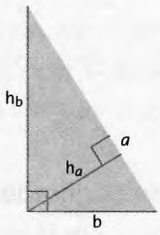
SEGÚN LOS ÁNGULOS / SEGÚN LOS LADOS	ACUTÁNGULOS	RECTÁNGULOS	OBTUSÁNGULOS
ISÓSCELES Por lo menos dos* lados congruentes.			
ESCALENO Ningún lado congruente.			

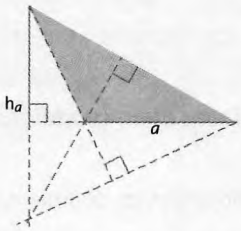
Alturas y medianas de un triángulo

Se denomina altura *de un triángulo al segmento que une perpendicularmente un vértice con el lado opuesto o su prolongación.*

Como se trata de un segmento que parte de un vértice, y cada triángulo tiene tres, se pueden trazar tres alturas. Estos tres segmentos concurren en un punto y, según el triángulo del que se trate, pueden o no estar incluidos en el triángulo.



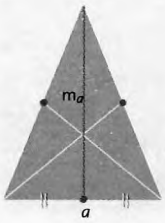


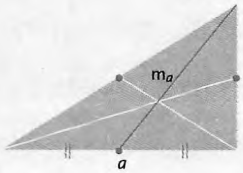


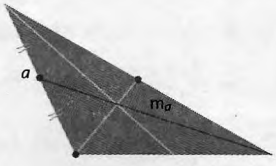
h_a: altura correspondiente al lado *a*.

Se denomina mediana *de un triángulo al segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto de éste.*

Todos los triángulos tienen tres medianas, que se cortan en un punto interior.







m_a: mediana correspondiente al lado *a*.

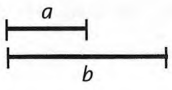
* **¿Qué significa *por lo menos*?**
Por lo menos *dos significa que también pueden ser más de dos. En este caso, permite expresar que un triángulo equilátero es también isósceles.*

Relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo

Cuando se construyen triángulos, no es posible considerar para sus lados medidas sin relación entre ellas. Efectivamente, si se parte de dos lados de medida conocida, *a* y *b*, la medida *c* del tercer lado debe cumplir una condición.

Por ejemplo, si $a = 3$ cm y $b = 5$ cm, para que el triangulo exista, c puede tomar valores según estas condiciones:

mayores que la diferencia entre *b* y *a*
$c > 2$ cm



menores que la suma entre *a* y *b*
$c < 8$ cm

Decir que tres segmentos son lados de un triángulo implica decir que la medida de cualquiera de ellos es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados y que la diferencia de las longitudes de dos de los lados es menor que la longitud del otro lado.

Cuadriláteros

Todo polígono de cuatro lados es un cuadrilátero.

Entre los cuadriláteros convexos, es posible realizar una clasificación considerando el paralelismo de sus lados opuestos.

TRAPECIO	Todo cuadrilátero que tiene al menos un par de lados opuestos paralelos.
PARALELOGRAMO	Todo cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos paralelos.
Rectángulo	Si tiene los cuatro ángulos rectos.
Rombo	Si tiene los cuatro lados congruentes.
Cuadrado	Si tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.
TRAPEZOIDE	Todo cuadrilátero que no tiene ningún par de lados opuestos paralelos.

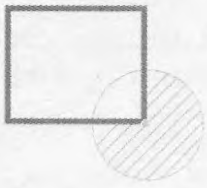
El siguiente esquema muestra cómo se relacionan las distintas clases de cuadriláteros convexos:

Las flechas se leen *"todos los ... son ..."*.

Lugar geométrico

Se puede imaginar un lugar tal que se verifique lo siguiente:

- Todo punto que pertenece al lugar en cuestión cumple con una condición.
- Todo punto que cumple con esa condición pertenece al lugar con el que se está trabajando.



Por ejemplo, un perro está atado con una soga a una estaca ubicada en la unión de dos paredes de un granero. Así, sólo se puede localizar al perro en la zona sombreada del esquema.

El conjunto de todos los puntos que cumplen con una determinada condición geométrica se denomina lugar geométrico.

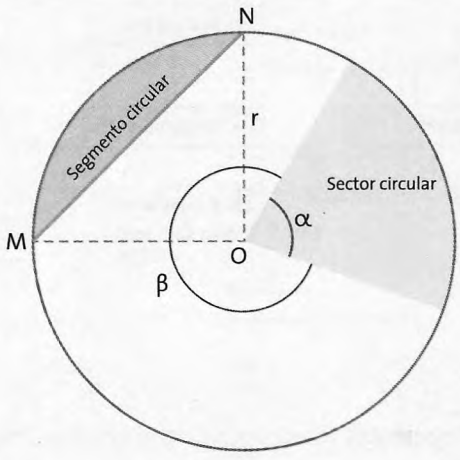
Circunferencia y círculo

Para delimitar en un plano una forma circular, se clava una chinche a la cual se ata el extremo de un hilo. Manteniendo bien firme el hilo y girando alrededor de la chinche, el extremo libre marca el contorno circular que se buscaba. Esto sucede porque, al mantener el hilo tirante, el extremo libre va pasando por todos los puntos cuya distancia a la chinche es igual a la longitud del hilo.

La circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto, el centro O de la circunferencia.

El círculo es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a otro punto, el centro O del círculo, es menor o igual que una distancia r.

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA Y DEL CÍRCULO



$\overset{\frown}{MN}$ arco
$\overline{MN}$ cuerda
$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ ángulos centrales

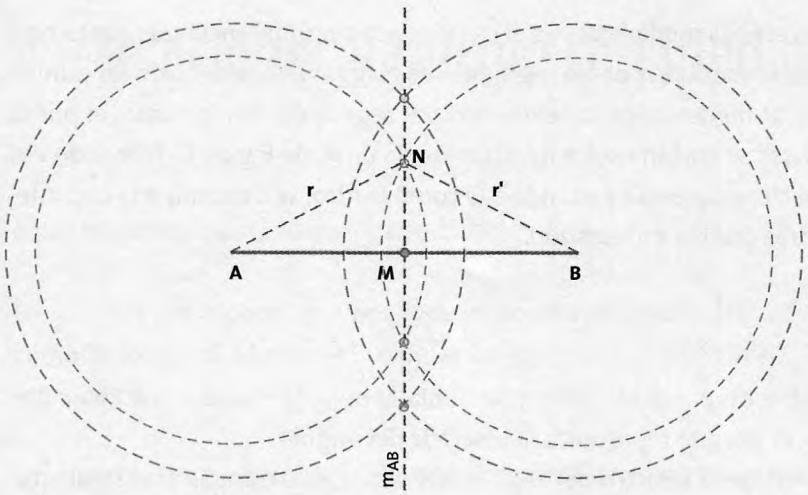
- Radio es el segmento que une el centro con cualquier punto perteneciente a la circunferencia.
- Cuerda es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- Diámetro es la cuerda que pasa por el centro.
- Segmento circular es cualquiera de las dos partes en que queda dividido el círculo a partir de una cuerda.
- Arco es cualquiera de las dos partes en que queda dividida la circunferencia a partir de dos puntos de ella, que son los extremos del arco.
- Ángulo central: su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados pasan, respectivamente, por dos puntos de ella.
- Sector circular es el conjunto de puntos del círculo correspondientes a un ángulo central.

Mediatriz de un segmento

Si se traza un segmento de extremos A y B sobre un papel de calcar, y se dobla la hoja de manera que A coincida con B, el pliegue representa una recta que es perpendicular a AB y que lo corta en M, su punto medio.

¿Cómo se pueden encontrar otros puntos distintos de M que también estén a la misma distancia de A y de B?

Todos los puntos que estén sobre la C (A, *r*) están a distancia *r* de A y todos los puntos que están sobre la C (B, *r'*) están a distancia *r'* de B. Por lo tanto, si se hace $r = r'$, y esas circunferencias se cortan en N, este punto estará a igual distancia de A y de B. Este razonamiento puede repetirse para tantas circunferencias como se quiera; entonces, todos los puntos equidistantes de A y de B quedan sobre la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por M.

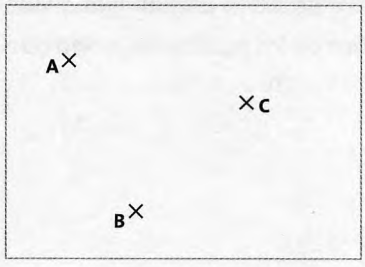
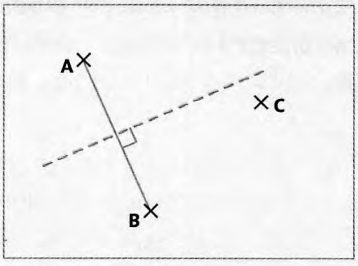
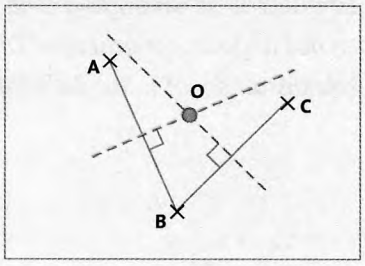


m_{AB}: mediatriz del segmento AB.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a éste que pasa por su punto medio. Dicha mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

Un problema

Los griegos eran expertos en resolver distintos problemas a partir de construcciones geométricas utilizando tan sólo regla no graduada y compás. Tal es el caso de la determinación de una circunferencia que pase por tres puntos dados no alineados, A, B y C, cuyo procedimiento representado en la figura de análisis* es el que sigue:

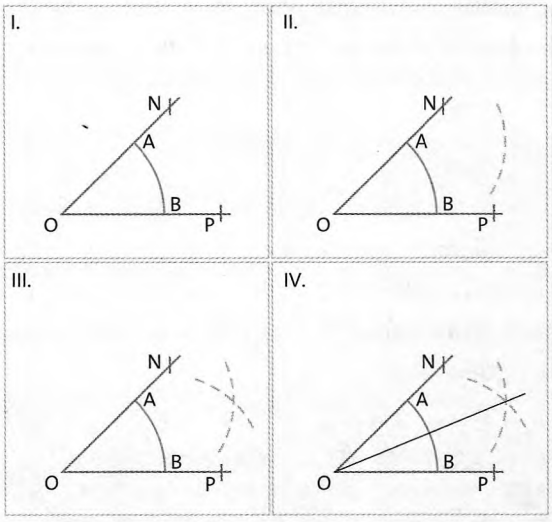
I. Para que los tres puntos estén sobre la circunferencia, el centro O de ésta debe equidistar de los tres puntos.	II. Primero hay que buscar un punto que equidiste de A y B. Todos los puntos de la mediatriz de $\overline{AB}$ cumplen con esa condición.	III. Luego hay que buscar otro punto que equidiste de B y C. Todos los puntos de la mediatriz de $\overline{BC}$ cumplen con esa condición.
		

* **¿Para qué se usan las figuras de análisis?**
Cuando se estudian propiedades en Geometría, es útil realizar una figura de análisis que represente la situación que se desea indagar. Si bien esto no sirve como demostración, permite formular algunas conjeturas.

El punto donde se cortan ambas mediatrices es el centro de la circunferencia que contiene a los puntos A, B y C porque la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de los extremos del segmento. Por lo tanto, el punto O donde dichas mediatrices se cortan está a igual distancia de A, de B y de C. Tomando esa medida como radio de la circunferencia y usando a O como centro, se determina la circunferencia que pasa por los tres puntos en cuestión.

Bisectriz de un ángulo

Si se traza un ángulo sobre un papel de calcar y se dobla la hoja de manera que coincidan ambos lados del ángulo, el pliegue representa la bisectriz del ángulo.
El procedimiento para construir la bisectriz del ángulo NOP con regla y compás es el siguiente:



I. Se marca con centro en O un arco de circunferencia que corte a $\overline{NO}$ en A y a $\overline{OP}$ en B.

II. Se fija el compás en A y con una medida mayor al arco anterior se traza un nuevo arco.

III. Sin modificar la apertura del compás, éste se fija en B y se corta el segundo arco trazado.

IV. Se une el punto de intersección de los dos últimos arcos con el vértice del ángulo NOP.

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que pasa por el vértice de dicho ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes. Dicha bisectriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.

4. Mediciones y cálculo con medidas

Magnitudes, cantidades y medidas

Los objetos del espacio que nos rodean poseen distintas características físicas o atributos, como la longitud, el peso, el color, la temperatura, la capacidad, la dureza y la superficie, entre otros.

Las características particulares que pueden compararse entre sí, como el largo y el ancho de una pileta o el peso de un cajón y el peso de una bolsa de cereales, se denominan cantidades.
Para hacer referencia al conjunto de las cantidades que pueden compararse entre sí, se usa la palabra magnitud.

> Por ejemplo, el ancho de un campo, el largo de una soga, la distancia entre dos puntos en un mapa y la altura de un edificio o una montaña corresponden a distintas cantidades de una misma magnitud: la longitud.

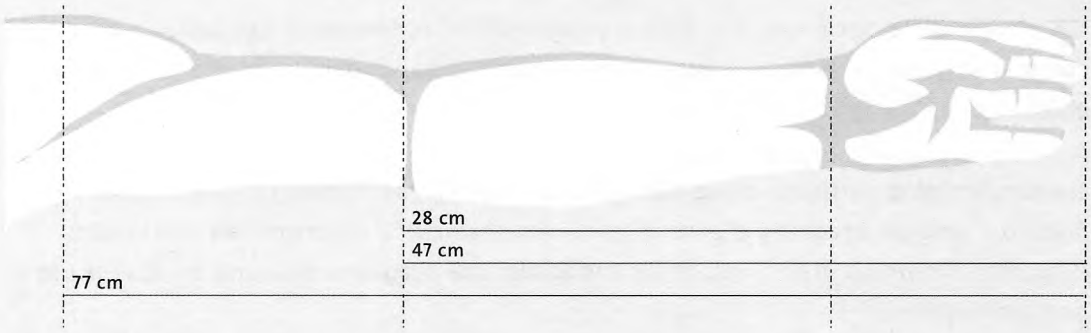
Para responder a la pregunta ¿cuánto? en relación con una cantidad de una magnitud, es necesario medir.

Cuando se realiza una medición, lo que se hace es comparar una cantidad con otra cantidad particular de la misma magnitud, que se llama unidad, *y que se define o se adopta por convención.*
El valor de una cantidad se expresa como el producto de un número por una unidad. Ese número, que indica la razón entre la cantidad que se debe medir y la cantidad usada como unidad, es la medida.
El valor numérico, o medida, de una cantidad particular depende de la unidad en que está expresada.

> Por ejemplo, la gran pirámide de Keops se construyó midiendo con "codos reales". La medida de su altura cuando se expresa en codos es 280, pero su medida expresada en metros es 146,44.

Unidades y sistemas de medición

A lo largo de la historia, muchos pueblos utilizaron distintos sistemas de medición, que en un principio involucraban unidades ligadas a las partes del cuerpo humano. Estas unidades no estaban definidas con claridad, como en el caso del codo, ni había equivalencias entre todas las distintas unidades, como, por ejemplo, entre los pasos y palmos.



Sólo en algunas culturas se organizaban equivalencias entre unidades de medida, utilizando como referencia las reglas de su sistema de numeración.

En el antiguo Egipto, donde se usaba un sistema de numeración aditivo con agrupaciones de a 10, algunas unidades de medida se organizaban con otras equivalencias.	En la Mesopotamia, con un sistema de numeración posicional de base 60, las unidades se relacionaban con múltiplos de 6, 12, 30, 60 y, en ocasiones, de 10.
LONGITUD: 1 codo = 6 palmos = 24 dedos 100 codos = 1 khet (vara)	LONGITUD: 1 codo = 30 dedos 6 codos = 1 bastón 1 cuerda = 120 codos

Esta falta de precisiones permitía modificar las unidades según la conveniencia de quien las usaba, lo que originaba muchos conflictos pues sólo es posible obtener medidas coincidentes con un patrón uniforme.

En Francia, en los años previos a la Revolución Francesa, las clases populares pedían la unificación de las unidades de medida para no salir perjudicados en los intercambios y, de ese modo, defendían sus derechos frente a los abusos de los señores feudales. Los científicos de la época, en medio de grandes discusiones, propusieron distintas alternativas para determinar una unidad patrón para la longitud, basada en la naturaleza. Después de varias experiencias, en 1791, se realizó una primera barra de metal cuya longitud es lo que consideró un metro. A partir de entonces, la Academia de Ciencias propuso el empleo del sistema decimal para establecer equivalencias entre unidades.

El metro se definió como la diezmillonésima parte de un cuarto del meridiano terrestre que pasa por París.

Este modelo no resultaba satisfactorio pues la longitud de una barra de metal puede variar con la temperatura. Por eso, se comenzó a trabajar en la construcción de un nuevo metro patrón y de un sistema de medidas que respondiera con mayor precisión a las necesidades de los científicos. Se estudiaron distintas propuestas y, en 1960, se estableció una compleja definición basada en la radiación del átomo de criptón.

En 1983, se volvió a definir el metro como la distancia recorrida por la luz durante $\frac{1}{299.792.458}$ segundos.

En la actualidad, se continúa trabajando sobre problemas asociados a las mediciones y existe una comisión especial dedicada al estudio del metro. En 1971, se terminó de definir un Sistema Internacional de Medidas (SI) que considera siete unidades fundamentales:

MAGNITUD	LONGITUD	TIEMPO	MASA	CORRIENTE ELÉCTRICA	TEMPERATURA	INTENSIDAD LUMINOSA	CANTIDAD DE SUSTANCIA
UNIDAD	METRO	SEGUNDO	KILOGRAMO	AMPERE	KELVIN	CANDELA	MOL

Además, se consideran unidades suplementarias, para la medida de ángulos por ejemplo, y unidades derivadas, como las usadas para medir superficies, volúmenes, velocidades y fuerzas, entre otras.

*En el caso de la longitud, la capacidad, el peso y la masa, el sistema de unidades tiene la misma estructura que el sistema decimal de numeración y, como los cambios de unidades se realizan de 10 en 10, cada unidad equivale a 10 unidades del orden anterior**.

* **Cómo usar distintas unidades de la misma magnitud**

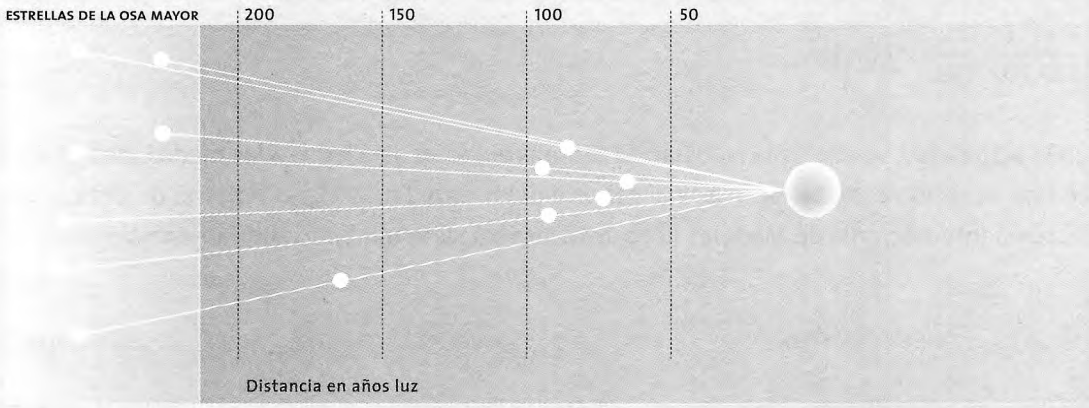
Al escribir una misma cantidad usando distintas unidades, es necesario tener en cuenta la relación entre ellas. Si el sistema es decimal, la relación entre las unidades está dada por la regla de agrupamiento del sistema, que es la base 10. Así, en el sistema decimal, la longitud de un lápiz se puede escribir, por ejemplo, 25 cm ó 2,5 dm ó 0,25 m. En cambio, en el sistema inglés, cuyas unidades no están relacionadas con el sistema decimal, esa longitud puede escribirse 10 pulgadas = 0,83 pies, pues 1 pie = 12 pulgadas.

1 centena = 10 decenas = 100 unidades 1 hectómetro = 10 decámetros = 100 metros	1 décimo = 10 centésimos = 100 milésimos 1 decímetro = 10 centímetros = 100 milímetros

La elección de una unidad fundamental, como el metro, el kilogramo y el litro, sólo se debe a que las otras unidades del sistema se definen como múltiplos y submúltiplos de dicha unidad fundamental.

En los casos en que se necesita indicar medidas de cantidades muy grandes o muy pequeñas, se utilizan otras unidades, como el año luz o el micrón:

1 año luz $\cong 10^{13}$ km y $1\ \mu = \frac{1}{10^6}$ mm.



Para otras magnitudes, como la superficie y el volumen, se utilizan potencias de 10 y cada unidad equivale, respectivamente, a 100 y 1000 unidades del orden anterior.

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2$	$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1.000.000\ cm^3$

Errores en las mediciones y en los cálculos con medidas

En la práctica, es necesario servirse de instrumentos, como balanzas, cintas métricas, recipientes graduados y relojes, que permiten hacer las mediciones de manera directa, como en el caso del peso, la longitud y el volumen, o de manera indirecta, como en el caso del tiempo.

Todas las mediciones involucran un error que depende tanto del instrumento como de quien realiza la medición y del método que utiliza. La precisión que se necesita varía según el problema que se trata de resolver. Cuando se mide, siempre se obtiene un valor aproxima-

do y lo importante es conocer cuál es el error máximo posible que se podría estar cometiendo al considerar ese valor. Para los problemas de la vida cotidiana, en general, se realiza una sola medición y se considera que el resultado es aceptable si la menor unidad que marca el instrumento no supera el 10% del valor obtenido*.

> Por ejemplo, es aceptable decir que se mide una hoja de papel con una regla y que se obtiene una medida, en centímetros, de 29,7 pues la menor unidad de la regla es 0,1 cm, que es menor que 2,97 cm.

Cuando se busca mayor precisión, se realiza una serie de mediciones, se calcula el promedio, se descartan los valores que están muy alejados del promedio y se calcula un nuevo promedio que se considera el valor numérico más adecuado para expresar el valor de la cantidad en cuestión.
Si el valor obtenido en una medición se utiliza en un cálculo, el error cometido se ve afectado por las operaciones que se realizan y, así, el resultado del cálculo puede tener un error distinto del error de la medición.

Perímetro y área de figuras

La experiencia, muchas veces, lleva a confundir los conceptos de perímetro y área porque en la vida cotidiana es frecuente hallar situaciones en las que estas cantidades aumentan o disminuyen conjuntamente.

> Por ejemplo, si se desea hacer manteles rectangulares, debe considerarse que un mantel más grande necesita más tela y más cinta para bordearlo que uno más pequeño.

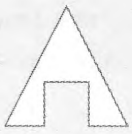
Pero, cuando se considera un conjunto de figuras, es necesario analizar cuidadosamente las relaciones entre perímetro y área.

Perímetro de polígonos

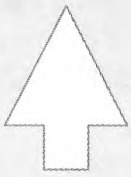
Las figuras A y B se obtuvieron combinando un cuadrado y un triángulo. Los perímetros son iguales, pero el área de A es menor que el área de B. Las figuras C y D, que se obtuvieron con dos triángulos, tienen distinto perímetro e igual área.

* **Estimar la medida**
La práctica frecuente de medir cantidades y la familiarización con referentes concretos de las unidades usuales permiten dar una buena estimación de la medida sin medir.

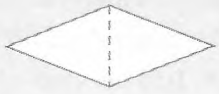
A



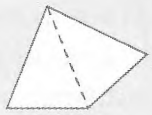
B



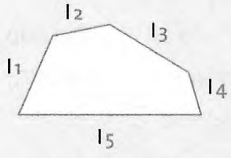
C



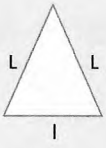
D



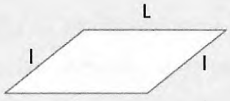
En general, para obtener el perímetro de un polígono, se suman las longitudes de los lados. En los casos en que hay lados congruentes, es posible multiplicar por un número natural a la longitud de esos lados.



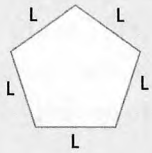
$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$



$P = L \cdot 2 + l$



$P = L \cdot 2 + l \cdot 2$



$P = L \cdot n^o$ de L

Longitud de la circunferencia

Es posible comprobar que la longitud de una circunferencia es algo más de tres veces la longitud del diámetro.

La razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro se conoce como pi *y se anota* π.

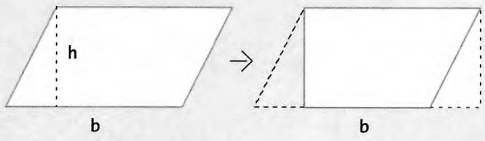
Esta razón ya era conocida por los griegos, que determinaron que su valor estaba comprendido entre $3\frac{1}{71}$ y $3\frac{1}{7}$. La dificultad para determinar su valor está en que esta razón no es un número racional. Muchos matemáticos, a lo largo de la historia, fueron aproximando el valor de pi con distintas cantidades de cifras decimales.

Hoy algunas computadoras pueden encontrar más de 500 millones de cifras sin que éstas comiencen a repetirse en ningún momento. Las primeras cifras son
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459...

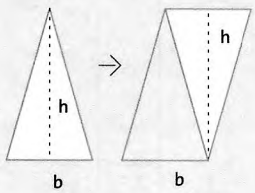
Se puede realizar un cálculo aproximado de la longitud de una circunferencia utilizando la siguiente fórmula: longitud de la circunferencia $= \pi \cdot d \cong 3{,}14 \cdot d$.

Área de polígonos y del círculo

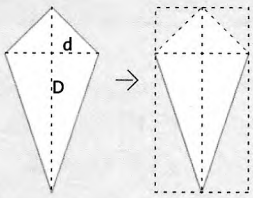
En el caso del cálculo de áreas de ciertos polígonos, es posible descomponer la figura y transformarla en otra figura con la misma área, pero de diferente forma, para la cual ya se conoce la fórmula del área.



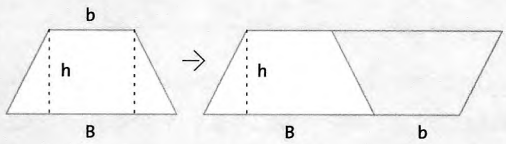
ÁREA DEL PARALELOGRAMO = $b \cdot h$



ÁREA DEL TRIÁNGULO = $\frac{b \cdot h}{2}$

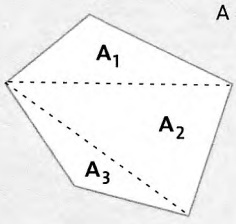


ÁREA DEL ROMBOIDE = $\frac{D \cdot d}{2}$

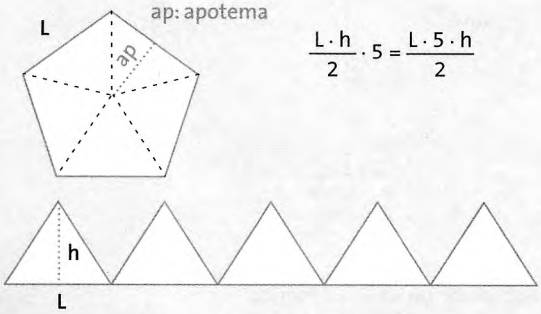


ÁREA DEL TRAPECIO = $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Para calcular el área de un polígono cualquiera, es posible descomponerlo en triángulos y sumar las áreas correspondientes. Si se trata de polígonos regulares, se puede utilizar el producto del área de cada triángulo por la cantidad de triángulos congruentes en los que se descompone el polígono regular.



$A = A_1 + A_2 + A_3$

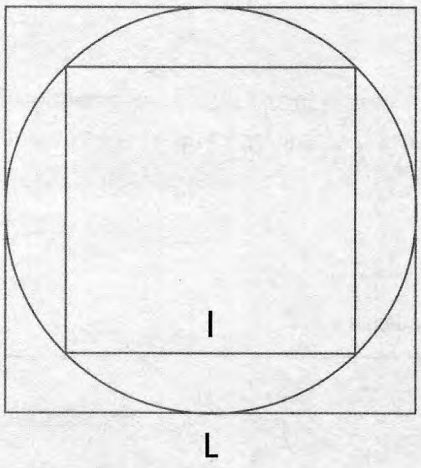


ap: apotema

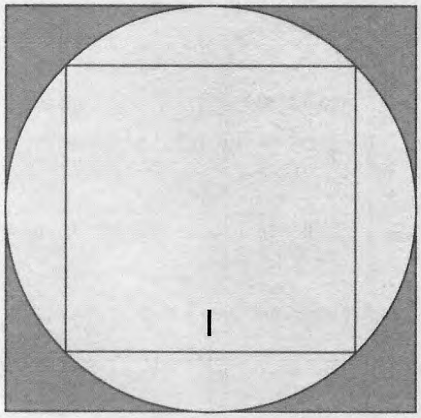
$\frac{L \cdot h}{2} \cdot 5 = \frac{L \cdot 5 \cdot h}{2}$

ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR = $\frac{Per \cdot ap}{2}$

En el caso de figuras con bordes curvos, el cálculo no resulta tan directo porque no es posible descomponer el contorno de la figura en una serie de segmentos ni su superficie, en triángulos o cuadrados.

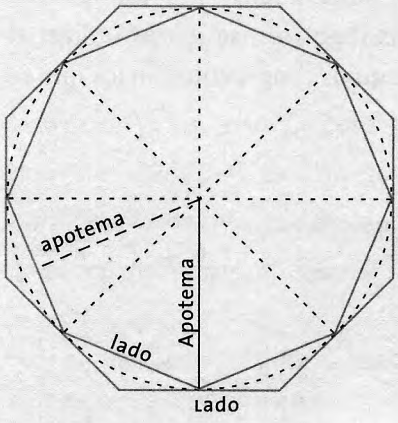


$4 \cdot l <$ Contorno del círculo $< 4 \cdot L$



$l^2 <$ Área del círculo $< L^2$

Esta aproximación permite encuadrar* el valor de la superficie del círculo. La diferencia se puede hacer más pequeña si, en lugar de utilizar un cuadrado, se utiliza un polígono regular de más lados.

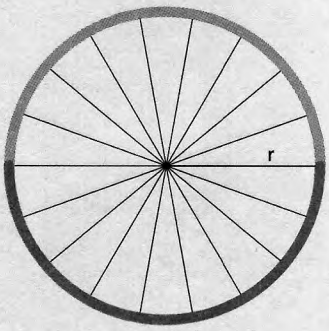


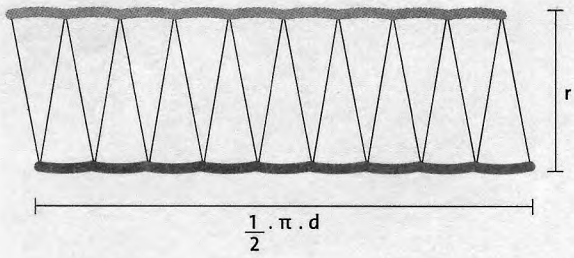
$$\frac{8 \cdot \text{lado} \cdot \text{apotema}}{2} < \text{Área del círculo} < \frac{8 \cdot \text{Lado} \cdot \text{Apotema}}{2}$$

* **Encuadrar un valor numérico**

En algunas ocasiones, no se puede hallar un valor numérico o no se necesita conocerlo con precisión. Entonces, algunas veces, es posible encontrar dos valores, uno mayor y otro menor, entre los cuales está comprendido el valor buscado, es decir, es posible determinar un intervalo de variación para el valor.

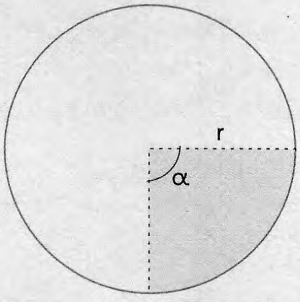
En el caso de la superficie de un círculo, es posible pensar que la figura se descompone en triángulos cuya altura es el radio del círculo y cuya base es tan pequeña como se quiera para obtener esta fórmula: Área del círculo = $\pi \cdot r^2 \cong 3{,}14 \cdot r^2$.



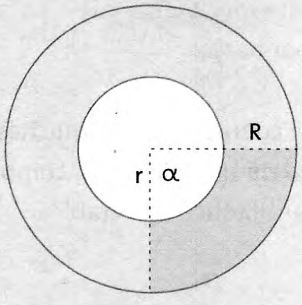


$$\text{ÁREA DEL CÍRCULO} = \frac{1}{2} \pi \cdot 2 \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

En las figuras que corresponden a partes de un círculo, basta considerar que la razón entre el área del círculo y 360º es equivalente a la razón entre el área de la figura en cuestión y la medida del ángulo central respectivo.



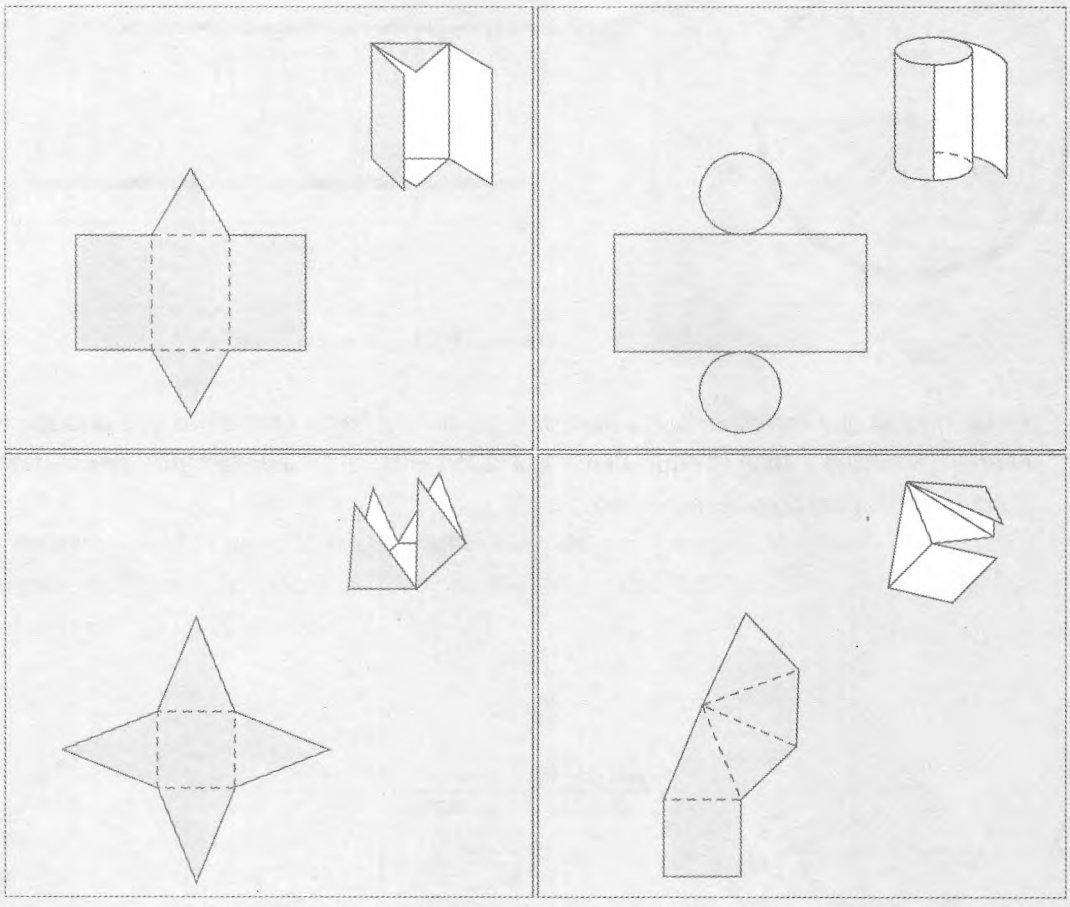
$$\frac{\text{ÁREA SECTOR CIRC.}}{\text{MEDIDA DE } \hat{\alpha}} = \frac{\pi \cdot r^2}{360^{\circ}}$$



$$\frac{\text{ÁREA TRAPECIO CIRC.}}{\text{MEDIDA DE } \hat{\alpha}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360^{\circ}}$$

Área y volumen de cuerpos

Para calcular el área lateral o total de un cuerpo, basta con considerar su desarrollo y calcular las áreas de las figuras que lo componen.

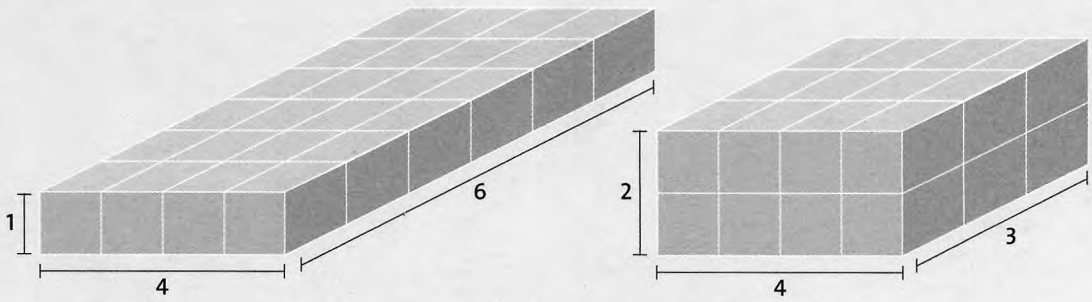


La medición y el cálculo de volúmenes se realiza frecuentemente para objetos de tres dimensiones en los que es posible conocer cada una de ellas. Tal es el caso del espacio disponible para almacenar cajas de heladeras en un contenedor para transporte por barco.

Si bien el volumen es una magnitud que se asocia generalmente a cuerpos sólidos, muchas veces se usan unidades de volumen para determinar la capacidad de un recipiente, como, por ejemplo, la cantidad de agua de un depósito o la dosis de un antibiótico inyectable.

Volumen de prismas de base rectangular

Estos dibujos corresponden a dos prismas que están formados por la misma cantidad de cubitos iguales de madera.



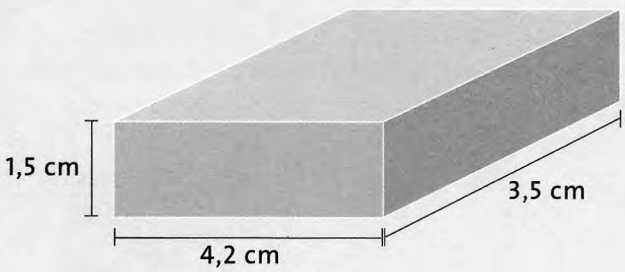
Si se considera el volumen de un cubito como unidad, en los dos casos, la medida del volumen de los prismas, expresada en cubitos, es 24. Estos prismas tienen distinta forma y el mismo volumen.

Si se considera cada piso de las construcciones, es posible calcular la cantidad total de unidades multiplicando la cantidad de cubitos por "piso" por el número de "pisos":

$V_1 = 6 \times 4 \times 1 = 24$ y $V_2 = 3 \times 2 \times 4 = 24$.

Si cada cubito tiene 1 cm de arista, se puede decir que la unidad* para medir el volumen es un centímetro cúbico y se anota cm^3.

Esta imagen de un cubito de 1 cm de arista es útil para comprender por qué el volumen de un prisma se obtiene multiplicando sus tres dimensiones si éstas están expresadas en un número entero de centímetros. Sin embargo, esta fórmula puede aplicarse en general:



$V = 3{,}5\ cm \times 4{,}2\ cm \times 1{,}5\ cm = 22{,}05\ cm^3$

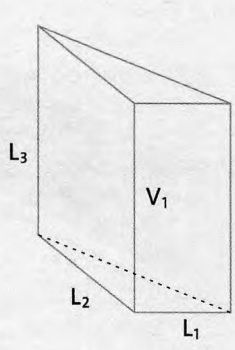
VOLUMEN DEL PRISMA = $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$

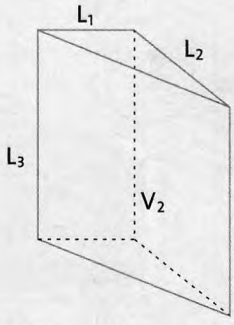
* **Unidades y forma**

Aunque es frecuente asociar un cubito de 1 cm de arista al cm^3, éste puede también corresponder a cuerpos diferentes. Por ejemplo, a un prisma de base rectangular de 2 cm x $\frac{1}{2}$ cm x 1 cm.

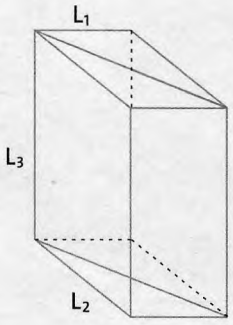
Volumen de otros prismas y de cilindros

Al igual que con las áreas, también es posible obtener el volumen de un cuerpo usando composiciones o descomposiciones en cuerpos de volumen conocido.



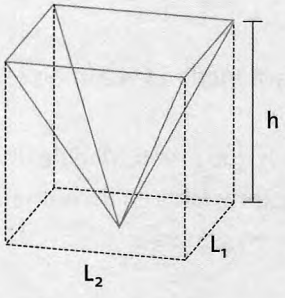


$$V_1 = V_2 = \frac{L_1 \cdot L_2}{2} \cdot L_3$$

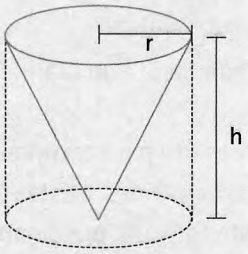


$$V_1 + V_2 = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$$

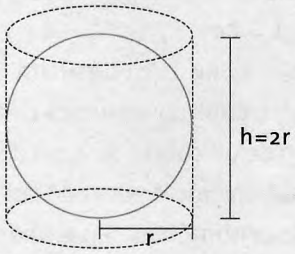
Se puede comprobar que las pirámides, los conos y las esferas guardan con los prismas y los cilindros que les corresponden las relaciones que se indican.



$$V = \frac{1}{3} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot h$$

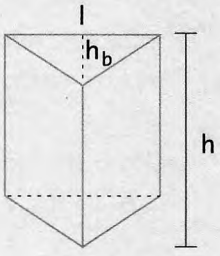


$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

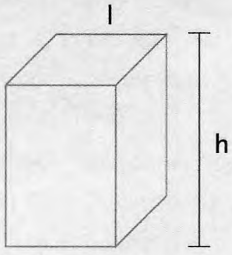


$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

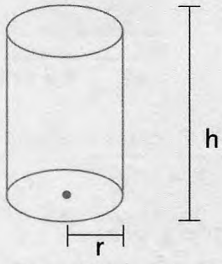
En general, para cuerpos que tienen dos caras paralelas e iguales, el volumen V se puede calcular con la fórmula: V = área de la base · altura.



$$V = \frac{l \cdot h_b}{2} \cdot h$$

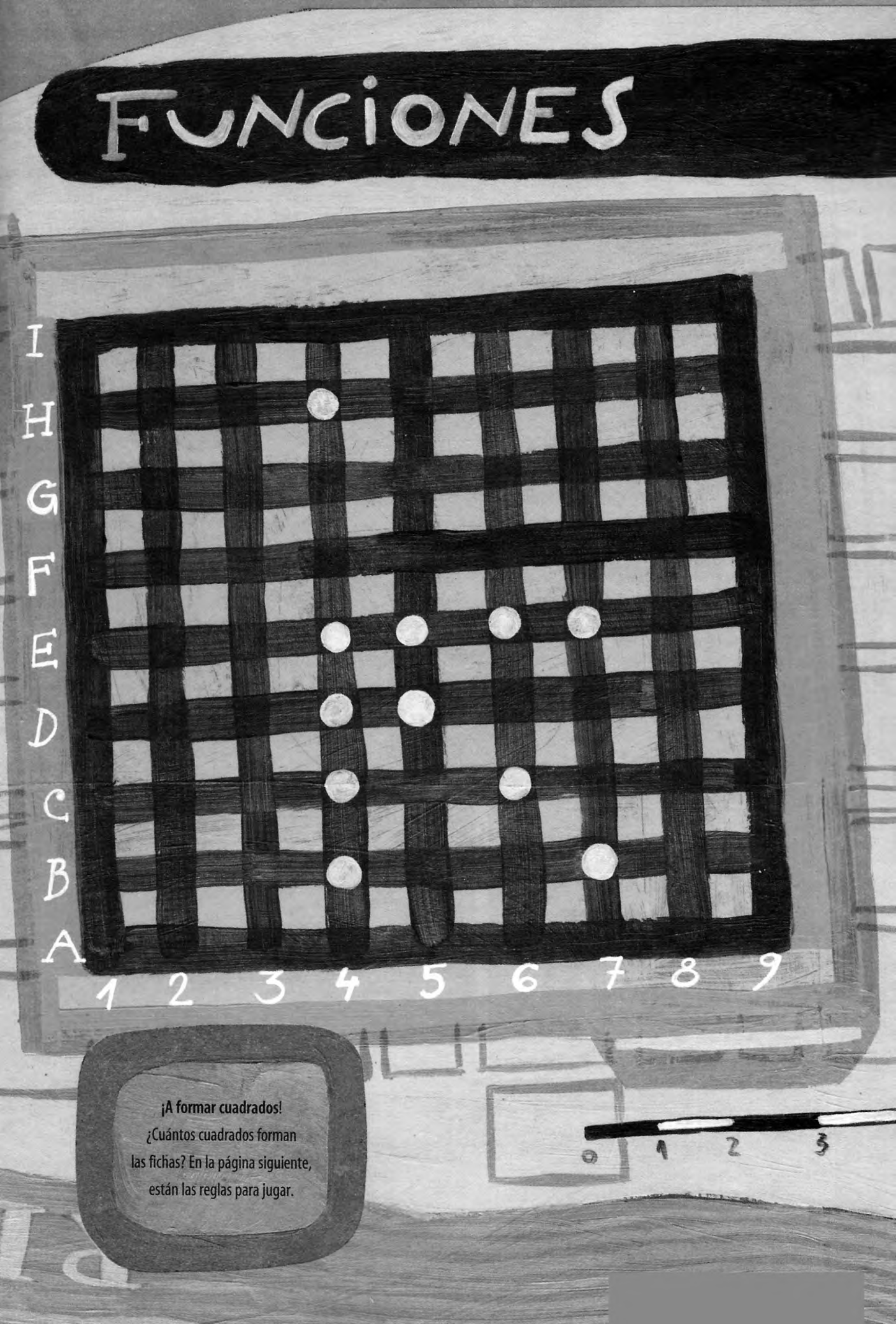


$$V = l^2 \cdot h$$



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

FUNCIONES



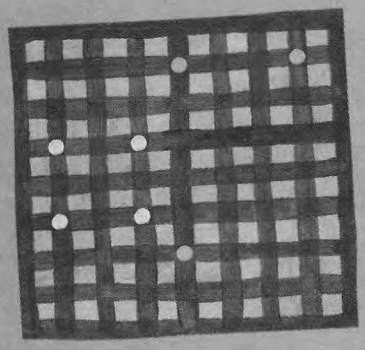
¡A formar cuadrados!
¿Cuántos cuadrados forman las fichas? En la página siguiente, están las reglas para jugar.

Distintas maneras de registrar

Las diferentes representaciones utilizadas en Matemática son numerosas: dibujos de figuras y de cuerpos geométricos, fórmulas que expresan perímetros, áreas y volúmenes, fracciones y expresiones decimales para escribir

números, y tablas que relacionan datos numéricos son algunas de ellas. A diario, en los medios de comunicación, la información se presenta mediante tablas y, más aún, mediante gráficas. Cuando esta información se refiere a fenómenos de cambio, suele utilizarse un tipo de gráfica que constituye, tal vez, una de las herramientas más adecuadas para interpretar matemáticamente no sólo cuestiones matemáticas, sino también situaciones de diferente naturaleza: económicas, meteorológicas, relativas a las ciencias naturales y a las ciencias sociales.

Para confeccionar tales gráficas, es necesario ubicar puntos en el plano. Los trabajos de Descartes y Fermat dieron lugar a la elaboración de los sistemas de coordenadas, aunque ninguno de los dos utilizó ese término. En el siglo XVII, Descartes buscaba un método para construir puntos, que dio origen a la Geometría analítica. Relacionaba las construcciones geométricas (las medidas de las longitudes sobre rectas en el plano) con las ecuaciones (los valores de x y de y). Fermat, por su parte, estudió los lugares geométricos particulares trabajados por los antiguos y propuso un camino para enunciar el problema de manera general, relacionando los lugares del plano con la variación de las cantidades desconocidas de una ecuación.



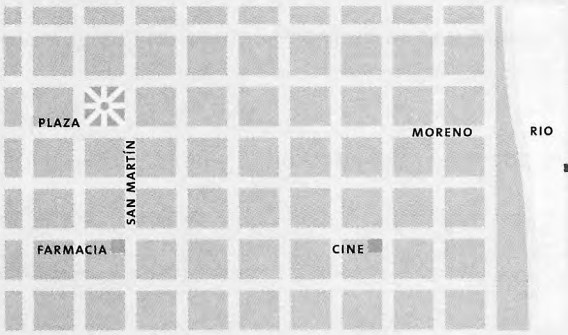
REGLAS

Se juega por parejas y cada jugador tiene un tablero. El jugador que comienza la partida marca un punto en su tablero y verbalmente le indica la ubicación del punto al otro jugador. El segundo jugador registra dicho punto y, a su vez, marca otro cuya ubicación dicta a su compañero, y así sucesivamente hasta completar el primer cuadrado. Es importante diferenciar los puntos seleccionados por cada jugador con tipos de marcas o colores distintos. Gana el jugador que logre armar el primer cuadrado.

5. Gráficas y funciones

Representación de puntos en el plano

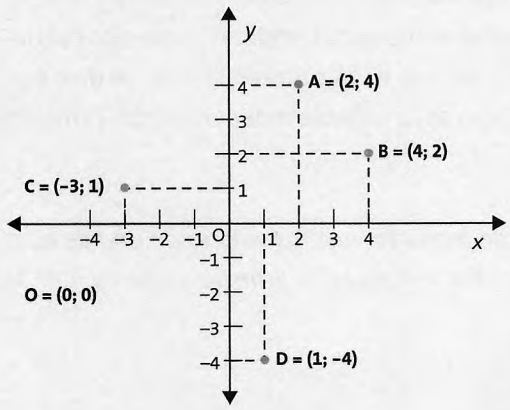
La posición de un objeto en el plano o en el espacio es algo relativo pues hay que aclarar respecto de qué lugar se considera tal posición, es decir, es necesario fijar una referencia.



SI SE QUIERE INDICAR DÓNDE ESTÁ UBICADO EL CINE, NO ES SUFICIENTE DECIR QUE ESTÁ A SIETE CUADRAS DE LA PLAZA. ES NECESARIO AGREGAR QUE ESTÁ A DOS CUADRAS, POR SAN MARTÍN, HACIA LA FARMACIA, Y A CINCO, POR LA PARALELA A MORENO, HACIA EL RÍO.

Para ubicar puntos en el plano, se utilizan rectas numéricas que se cortan en sus respectivos orígenes y constituyen un sistema de referencia denominado sistema de coordenadas cartesianas.

Si bien las rectas numéricas pueden ser oblicuas o perpendiculares, usualmente se trabaja con rectas numéricas perpendiculares, como en el dibujo siguiente:



A las rectas se las llama *ejes de coordenadas* y su intersección es el origen. El eje horizontal es el *eje de las abscisas* y el eje vertical es el *eje de las ordenadas.* Todo punto del plano puede ubicarse por medio de un par ordenado de números llamados *coordenadas del punto,* las cuales, para un punto P cualquiera, se anotan P = (*x*; *y*). El primer elemento del par, *x*, es la *abscisa del punto* y el segundo elemento del par, *y*, es la *ordenada del punto.*

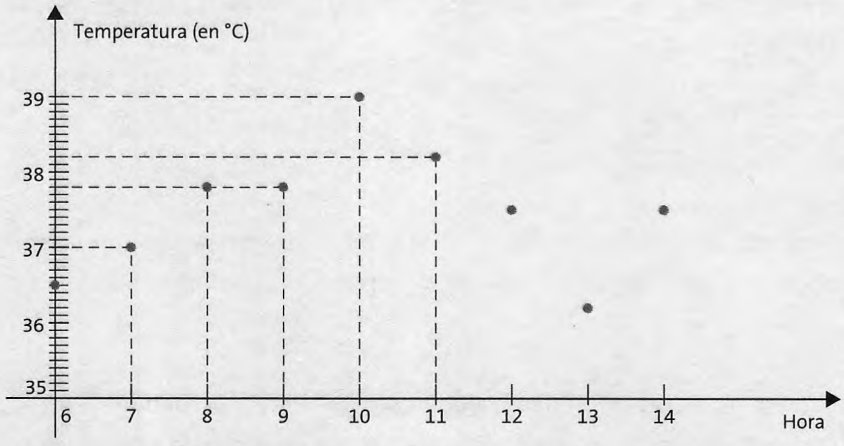
Representación de relaciones entre datos

Las gráficas, las tablas y las fórmulas son algunas de las formas en que se representan las relaciones entre datos. La elección de una de ellas depende del problema por resolver.

Gráficas cartesianas y tablas de valores

Para representar relaciones entre datos, también se puede utilizar un sistema formado por dos ejes perpendiculares. Las representaciones realizadas de esta manera se llaman *gráficas cartesianas*.

Por ejemplo, para analizar la evolución de un paciente, se ha registrado su temperatura cada una hora y se la ha representado en la siguiente gráfica:



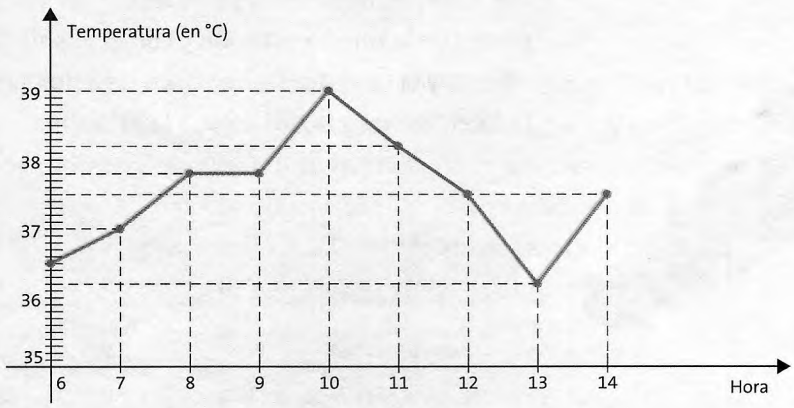
Si se pregunta qué temperatura tenía el paciente a las 8 horas, a partir de la gráfica es posible afirmar que tenía 37,8 °C.
Pero si se pregunta a qué hora el paciente tenía 37,8 °C, no es posible dar una única respuesta.

Al graficar, se ha elegido el origen en función del contexto del problema. El tiempo y la temperatura cambian en forma simultánea. Se dice que el tiempo y la temperatura son dos variables. Dado que la temperatura depende de la hora en que haya sido registrada, se dice que la temperatura es la variable dependiente y el tiempo es la variable independiente. También se dice que la temperatura es función del tiempo.

Cuando las cantidades de dos magnitudes varían de modo tal que los valores de una de ellas quedan determinados a partir de los valores de la otra, entonces, la primera es función de la segunda.

Si se quiere tener una visión global más clara de la evolución de la temperatura del paciente, pueden unirse los puntos.

De acuerdo con los datos registrados, se puede estimar que entre las 10 y las 13 horas el paciente mejoró, pero no es posible asegurar que su temperatura haya bajado durante todo ese intervalo.



Los datos anteriores también pueden presentarse mediante una tabla como la siguiente:

HORA	6	7	8	9	10	11	12	13	14
TEMPERATURA (EN °C)	36,5	37	37,8	37,8	39	38,2	37,5	36,2	37,5

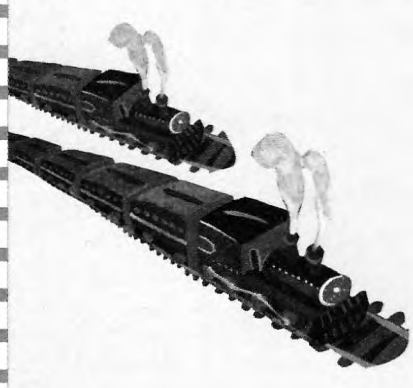
La tabla facilita el registro de los datos en forma organizada y la gráfica facilita el análisis de la evolución del paciente.

El uso de tablas de valores se remonta a épocas muy antiguas. Los matemáticos babilónicos (del 2000 a. C. al 600 a. C.) utilizaron tablas en placas de arcilla, que llegaron hasta nuestros días, en las que incluían valores que registraban o que calculaban. Confeccionaron tablas con datos astronómicos y también utilizaron tablas de multiplicar, de inversos, de cuadrados y de cubos, o de raíces cuadradas y cúbicas, escritas en su sistema de numeración sexagesimal.

TABLA DE MULTIPLICAR DEL 9

1	9
2	18
3	27
4	36

En algunos casos, no resulta simple responder a determinadas preguntas a partir de una tabla.



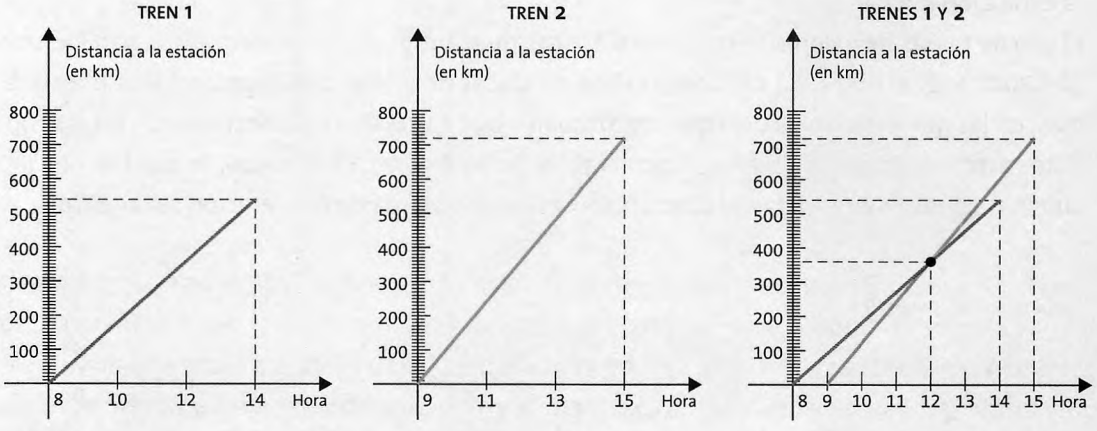
Por ejemplo, dos trenes se mueven con velocidad constante. Los dos parten de la misma estación y con el mismo destino, uno de ellos a las 8 horas y el otro, a las 9 horas. En las siguientes tablas, se ha representado el tiempo y la distancia a la estación.

PRIMER TREN	TIEMPO (EN HORAS)	8	10	12	14
	DISTANCIA A LA ESTACIÓN (EN km)	0	180	360	540

SEGUNDO TREN	TIEMPO (EN HORAS)	9	11	13	15
	DISTANCIA A LA ESTACIÓN (EN km)	0	240	480	720

En este caso, no es simple saber a qué distancia de la estación y a qué hora ambos trenes se encuentran.

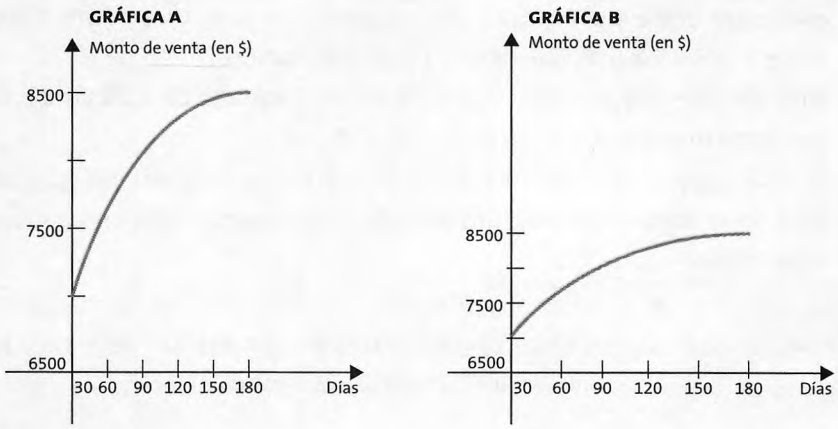
Si las distancias recorridas por ambos trenes en función del tiempo se representan en gráficas separadas, tampoco es fácil responder. En situaciones como ésta, en las que se trata de encontrar una intersección, conviene utilizar una sola gráfica.



En estas gráficas, no se ha representado la trayectoria de los trenes. Ambos viajan por el mismo camino y cuando se encuentran lo hacen por diferentes vías.

Cuando se considera una gráfica*, es importante tener en cuenta los criterios que se han utilizado para realizarla y la intención que puede haber detrás de la representación elegida.
A continuación, se presentan dos gráficas realizadas a partir de la misma información, pero con intenciones diferentes.

Por ejemplo, un vendedor pretende que le aumenten el sueldo. Para eso hizo la gráfica A, que representa los montos diarios de sus ventas en los últimos dos meses, y se la presentó al jefe junto con el pedido de aumento. A los pocos días, el jefe llamó al vendedor para informarle que no le daría el aumento y utilizó como argumento la gráfica B.



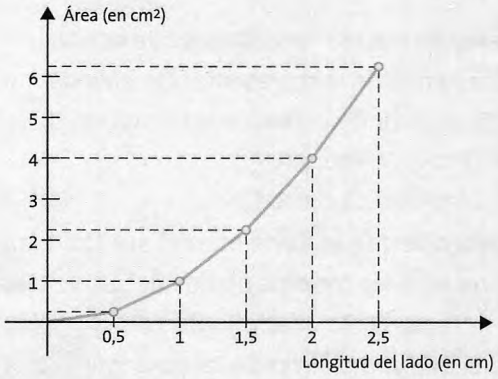
Las gráficas tienen escalas diferentes. A partir de la gráfica A, se intenta "mostrar" que las ventas aumentaron de manera notable, mientras que a partir de la gráfica B se intenta "mostrar" que no aumentaron tanto.

Fórmulas

Para expresar algunas relaciones entre datos, resulta útil emplear fórmulas.

EJEMPLO 1: A continuación, se ha representado la variación del área de un cuadrado en función de la variación de la longitud de su lado.

* **Gráficas y gráficos**
Aunque, en ocasiones, se usan indistintamente los términos *gráfica* y *gráfico*, éste último tiene un significado más amplio. Son gráficos las representaciones usadas en estadística y también otras con figuras geométricas diversas.



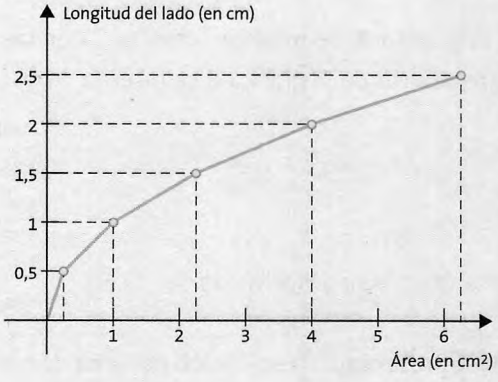
LONGITUD DEL LADO (EN cm)	ÁREA (EN cm²)
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25

¿Cuál es el área de un cuadrado de 2,25 cm de lado? La tabla sólo permite estimar que se encuentra entre 4 cm² y 6,25 cm², en tanto que la gráfica permite saber que se encuentra entre 5 cm² y 5,1 cm², que es una mejor estimación.

Para obtener con precisión el área A de un cuadrado de 2,25 cm de lado, se procede de la siguiente manera: $A = (2{,}25\ \text{cm})^2 = 5{,}0625\ \text{cm}^2$.

Es decir, se utiliza la fórmula $A = l^2$, donde l es la longitud del lado del cuadrado y A es su área. En la fórmula, la longitud del lado es la variable independiente y el área es la variable dependiente

EJEMPLO 2: También es posible analizar cómo varía la longitud del lado del cuadrado a medida que varía el área.



ÁREA (EN cm²)	LONGITUD DEL LADO (EN cm)
0	0
0,25	0,5
1	1
2,25	1,5
4	2
6,25	2,5

Esta situación equivale a considerar el área como variable independiente y la longitud del lado del cuadrado, como variable dependiente. En este caso, la fórmula correspondiente es $l = \sqrt{A}$.

Funciones de proporcionalidad directa

Son muchas las situaciones en las que es necesario estudiar cantidades de magnitudes cuya razón es constante.

Por ejemplo, en el caso del movimiento de un tren con velocidad constante, es posible vincular las distancias recorridas y los correspondientes tiempos.

TIEMPO (EN HORAS)	0	2	4	6
DISTANCIA A LA ESTACIÓN (EN km)	0	180	360	540

$$\frac{180}{2} = \frac{360}{4} = \frac{540}{6}$$

La razón entre la distancia d y el tiempo t es un valor constante: $\frac{d}{t} = 90$.

Las cantidades de dos magnitudes son directamente proporcionales *cuando están vinculadas de modo tal que al doble, al triple y demás de una corresponde el doble, el triple y demás de la otra. En ese caso, al realizar el cociente entre las cantidades que se corresponden, se obtiene un mismo número. En general,* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En el ejemplo anterior, para relacionar el tiempo con la distancia, es posible multiplicar por 90. Este número es la constante de proporcionalidad y permite obtener la distancia recorrida en km después de un cierto tiempo.
Si se expresa la distancia recorrida, d, en función del tiempo, t, entonces, puede usarse la fórmula $d = 90 \cdot t$.
Si se quiere expresar el tiempo, t, en función de la distancia recorrida, d, la fórmula es $t = \frac{d}{90}$.

Propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa

Si se trata de responder a la pregunta de en cuánto tiempo se recorre una determinada distancia, además de poder calcularlo con la fórmula, se puede proceder de otras maneras.

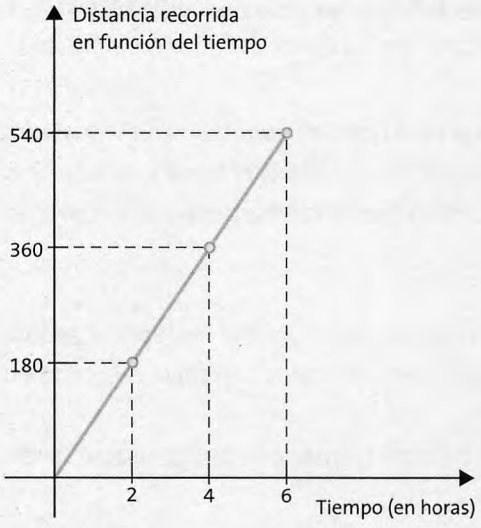
EJEMPLO 1: Si para 180 km corresponden 2 horas, para 900 km, que es el quíntuple de 180 km, corresponderán 10 horas, que es 5 x 2 horas.

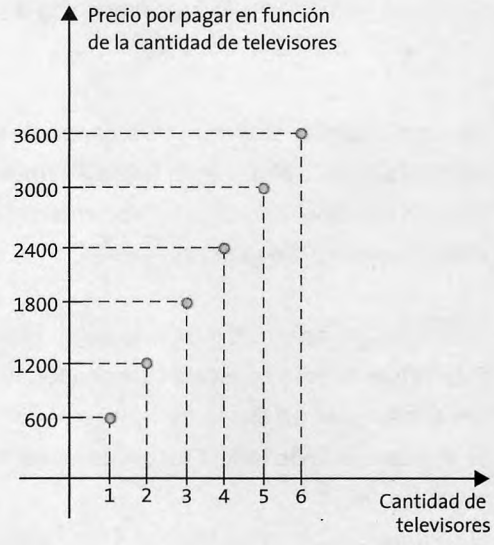
EJEMPLO 2: Si para 540 km corresponden 6 horas y para 360 km corresponden 4 horas, para 900 km, que es igual a 540 km + 360 km, corresponderán 10 horas, que es igual a 6 horas + 4 horas.

En general, en las relaciones de proporcionalidad directa, se cumple lo siguiente:

Si se multiplica (o divide) un valor de una de las cantidades por un número, el valor correspondiente es igual al original multiplicado (o dividido) por el mismo número.
A la suma (o a la resta) de dos valores de una de las cantidades, le corresponde la suma (o la resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad.

Si los valores correspondientes a una relación de proporcionalidad directa se representan en un sistema de coordenadas cartesianas, los puntos de la gráfica que se obtiene se encuentran en una recta que pasa por el origen de coordenadas*.





En algunos casos, las relaciones analizadas parecen ser de proporcionalidad directa, pero no lo son.

* **Dibujar líneas o puntos**
Cuando en los ejes de coordenadas se representan cantidades que sólo puden ser expresadas usando números enteros, la gráfica es un conjunto de puntos aislados. No tiene sentido, por ejemplo, pensar en el precio de 1,5 televisores.

Por ejemplo, como ocurre en el siguiente caso:

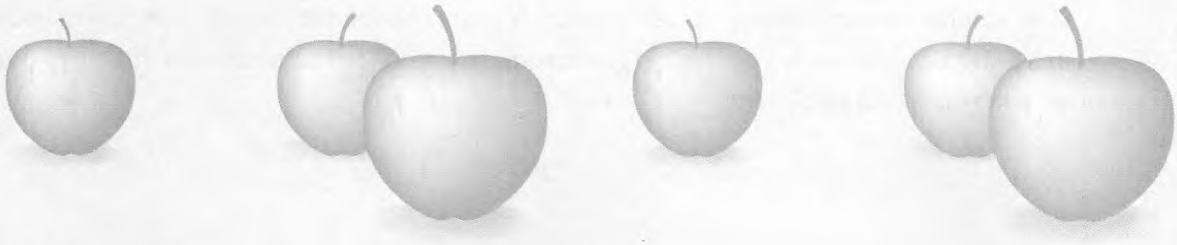
Existe una relación de proporcionalidad directa entre el peso de las manzanas y el precio, siempre que se compren menos de 10 kg o que se compren de a 10 kg. Sin embargo, no se puede afirmar que para cualquier peso ocurre que el doble cuesta el doble, es decir, no se trata de una relación de proporcionalidad directa.

PESO (EN kg)	PRECIO (EN $)
1	2
2	4
3	6
4	8
9	18
$2 \frac{\$}{kg}$ valor constante	

PESO (EN kg)	PRECIO (EN $)
10	18
20	36
30	54
40	72
$1{,}8 \frac{\$}{kg}$ valor constante	

PESO (EN kg)	PRECIO(EN $)
6	12
12	22
15	28
24	44
$\frac{12}{6} \neq \frac{22}{12} \neq \frac{28}{15} \neq \frac{44}{24}$	

EN LA ÚLTIMA TABLA, EL PRECIO NO SE OBTIENE MULTIPLICANDO LOS KILOS POR UNA CONSTANTE.



Funciones de proporcionalidad inversa

En algunos casos, las cantidades de dos magnitudes vinculadas entre sí varían de modo tal que su producto permanece constante.

Por ejemplo, como en el siguiente caso:
Un grupo de amigos quiere comprar un regalo que cuesta $87. En la siguiente tabla, se ha representado el monto que paga cada uno según el número de personas que intervienen en el regalo.

NÚMERO DE PERSONAS	1	2	3	4	5	6
MONTO (EN $)	87	43,5	29	21,75	17,4	14,5

$1 \times 87 = 2 \times 43{,}5 = 3 \times 29 = 4 \times 21{,}75 = 5 \times 17{,}4 = 6 \times 14{,}5$

El producto entre el número de personas, c, y el monto, p, que pagó cada una es un valor constante: $p \cdot c = 87$.

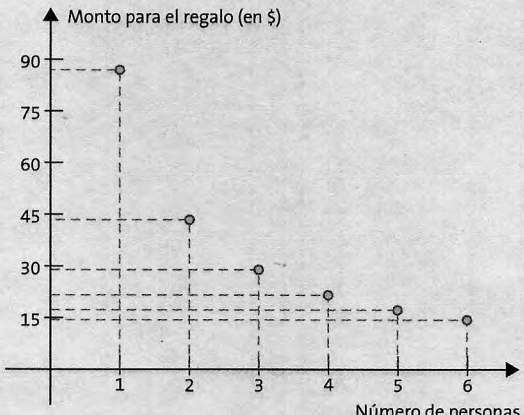
Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando están vinculadas de modo tal que al doble, al triple y demás de una de ellas le corresponde la mitad, la tercera parte y demás de la otra. En ese caso, al realizar el producto entre los valores que se corresponden, se obtiene un mismo número. Entonces, se dice que esas cantidades son inversamente proporcionales.

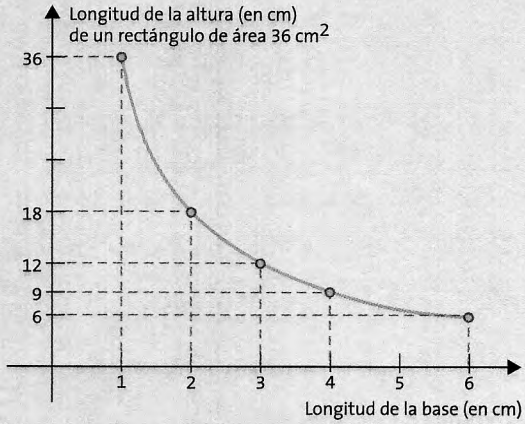
En el ejemplo anterior, la constante de proporcionalidad es 87.

Si se expresa el monto, p, correspondiente a cada persona en función del número de personas, c, que intervienen en el regalo, la fórmula es $p = \frac{87}{c}$.

Si se quiere expresar el número de personas que intervienen en el regalo en función del monto correspondiente a cada una, se usa la fórmula $c = \frac{87}{p}$.

Si los valores correspondientes a una relación de proporcionalidad inversa se representan en una gráfica cartesiana, los puntos del gráfico que se obtiene se encuentran en una curva que se llama *hipérbola equilátera*.



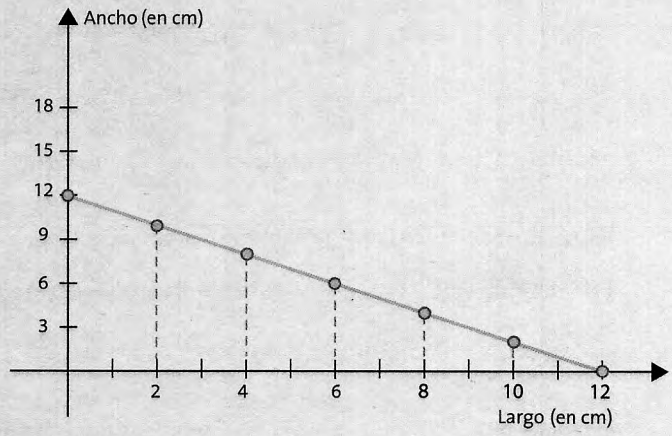


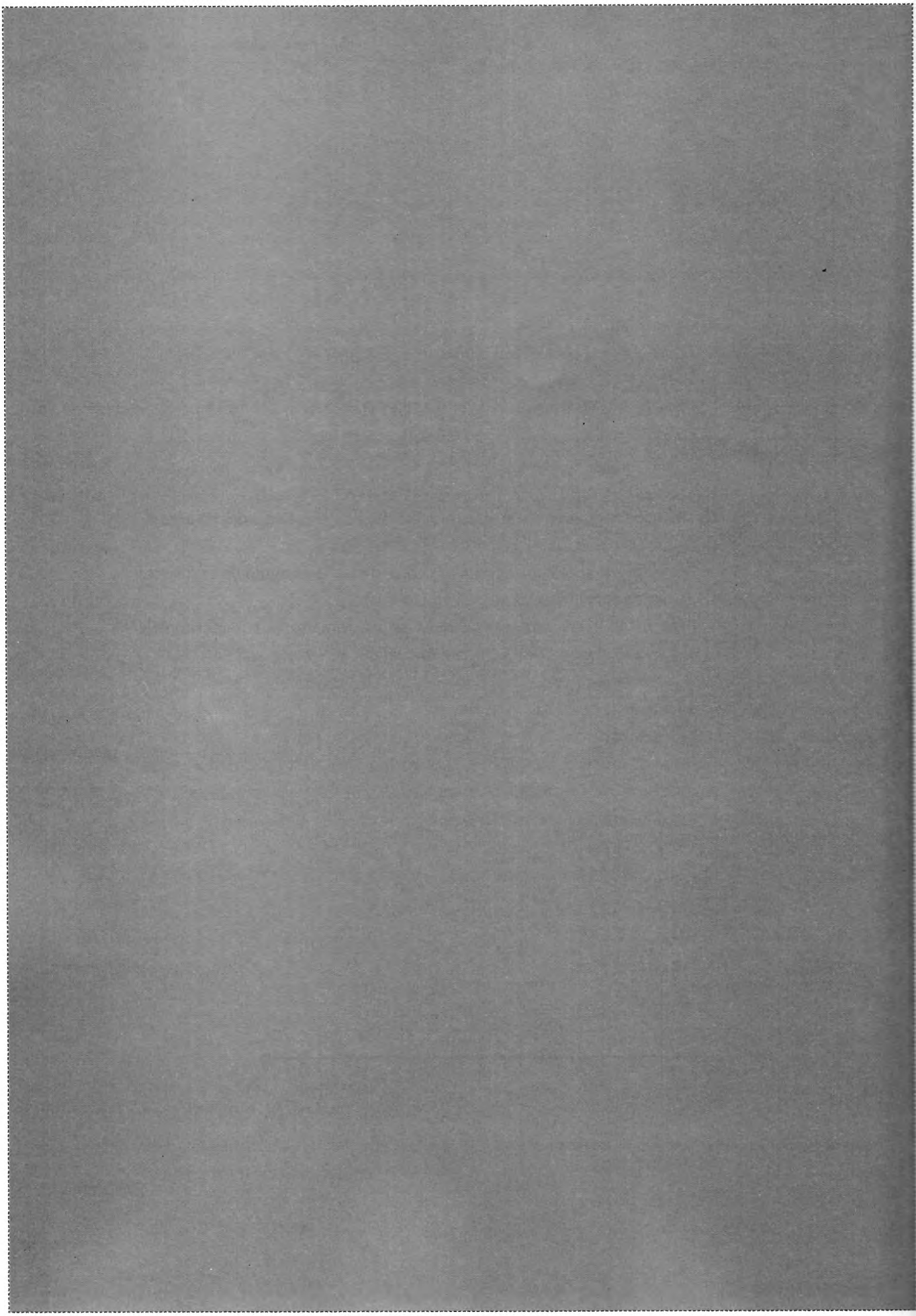
En ocasiones, algunas situaciones pueden parecer de proporcionalidad inversa, pero no lo son.

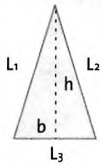
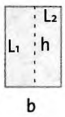
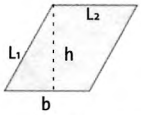
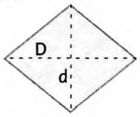
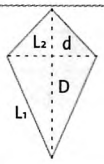
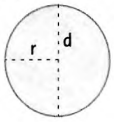
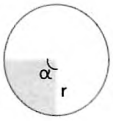
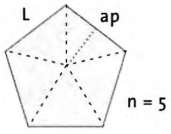
Por ejemplo, si se considera el ancho, a, de un rectángulo de perímetro 24 cm en función del largo, l.

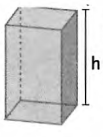
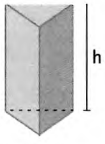
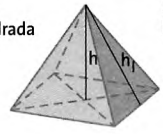
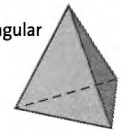
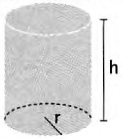
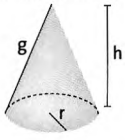
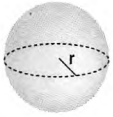
Para facilitar las representaciones se ha tomado el semiperímetro: Si $2 \cdot a + 2 \cdot l = 24$, $a + l = 12$, con lo cual $a = 12 - l$.

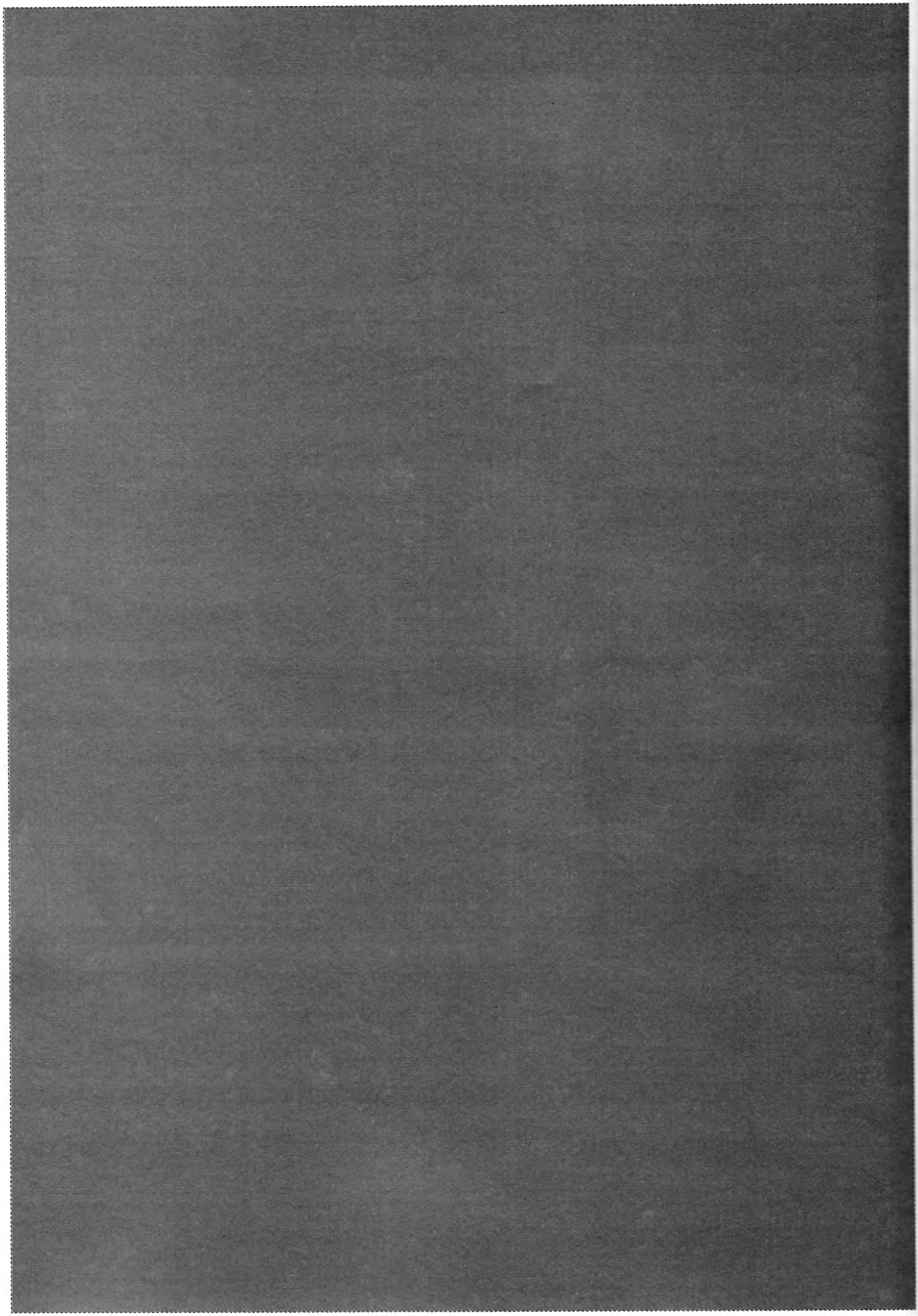
LARGO (EN cm)	11	10	9	8	7	6
ANCHO (EN cm)	1	2	3	4	5	6





FIGURAS PLANAS	PERÍMETROS	ÁREA
TRIÁNGULO 	$L_1 + L_2 + L_3$	$\frac{b \cdot h}{2}$
CUADRADO RECTÁNGULO  PARALELOGRAMO 	$L \cdot 4$ $L_1 \cdot 2 + L_2 \cdot 2$ $L_1 \cdot 2 + L_2 \cdot 2$	L^2 $b \cdot h$ $b \cdot h$
ROMBO  ROMBOIDE 	$L \cdot 4$ $L_1 \cdot 2 + L_2 \cdot 2$	$\frac{D \cdot d}{2}$ $\frac{D \cdot d}{2}$
CÍRCULO  SECTOR CIRCULAR 	$\pi \cdot d$ $\frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360}$	$\pi \cdot r^2$ $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$
PENTÁGONO 	$L \cdot n$	$\frac{L \cdot ap}{2} \cdot n$

CUERPOS	ÁREA	VOLUMEN
PRISMA base rectangular  PRISMA base triangular 	Área de la base x 2 + Perímetro de la base · h	Área de la base · h
PIRÁMIDE base cuadrada  PIRÁMIDE base triangular 	Área de la base + Perímetro de la base · h de la cara lateral / 2	$\frac{1}{3}$ área de la base · h
CILINDRO 	$\pi \cdot r^2 + \text{long } C_f \cdot h$	$\pi \cdot r^2 \cdot h$
CONO 	$\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$	$\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$
ESFERA 		$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3$



SE ESCRIBE	SE LEE	SE ESCRIBE	SE LEE
$a < b$	a es menor que b	h	Altura
$a \leq b$	a es menor o igual que b	h_c	Altura correspondiente al lado c
$a > b$	a es mayor que b	$\overset{\frown}{AB}$	Arco AB
$a \geq b$	a es mayor o igual que b	$C_f\,(A,r)$	Circunferencia de centro A y radio r
$a = b$	a es igual a b	$C\,(A,r)$	Círculo de centro A y radio r
$a \neq b$	a es distinto de b	$\lvert\overline{MN}\rvert$	Medida del segmento MN
$\overline{AB}$	Lado AB	$\lvert\hat{C}\rvert$	Medida del ángulo C
$\hat{C}$	Ángulo C	$\hat{\alpha};\ \hat{\beta};\ \hat{\psi}$	Ángulos alfa, beta, gamma

Matemática

I

A partir del enfoque de resolución de problemas, en *Matemática I* se ofrece una variada gama de situaciones en distintos contextos, que permiten al alumno desarrollar habilidades matemáticas en un marco de trabajo ameno. La propuesta contiene dos tipos de materiales, los Trabajos prácticos, transportables a la carpeta de cada alumno, y el Anexo teórico. Los Trabajos prácticos se organizan en torno a tres momentos clave de la enseñanza: la revisión, el desarrollo de un tema, y la ejercitación y la práctica. En el Anexo teórico, se exponen, de un modo accesible, los contenidos curriculares. Se incluyen dos fichas que pueden resultar muy prácticas: una con todas las fórmulas y otra con todos los símbolos que conviene tener a mano.

longseller